Probabilidad y Estadística 2

Cuadernillo de trabajo

ELABORADO POR: ING. JOSÉ DE JESÚS TORRES COTA
PLANTEL 05, Cd. Constitución.
Núm. De Cel. :6121559618

Propósito de la asignatura:

Tiene como propósito general desarrollar el pensamiento lógico-matemático mediante su análisis de eventos probabilísticos en situaciones contextualizadas perdiéndole la toma de decisiones en eventos futuros de su vida. Tomando en cuenta los ejes del campo disciplinar de matemáticas propuestos por el nuevo modelo educativo es pertinente que el estudiando desarrollo el pensamiento estocástico a partir del manejo de la información considerando el riesgo, la inferencia y la aleatoriedad de los elementos probabilísticos, lo anterior permitirá abonar al desarrollo del perfil de egreso y así facilitar su ingreso a nivel superior.

Bloque I:

Probabilidad

Probabilidad y Estadística.

INTRODUCCION

¿Cuál es la posibilidad de ver una estrella fugaz? ¿Cuál es la posibilidad de que llueva mañana? ¿Ganaré la lotería algún día? Cuando queremos saber si un evento o suceso es posible o no, recurrimos a la **probabilidad**. Así, la probabilidad es el valor numérico que nos sirve para determinar la ocurrencia o no de una situación dada.

Por ejemplo, cuando lanzamos una moneda al aire, existe una probabilidad de 0,50 que obtendremos águila o sol (cara o cruz en algunos países). En una pregunta de verdadero o falso, tenemos una oportunidad de 50-50 de contestar correctamente si escogemos la respuesta al azar, esto es, la probabilidad es de 0,50.

También cuando decimos que en una caja de fósforos existe un 1% de que un fósforo no se encienda, lo expresamos como una probabilidad de 0,01. Esto es que en 100 veces que frotamos un fósforo, al menos uno no se encenderá.

Probabilidad y estadística.

La probabilidad y la estadística van de la mano. De hecho, la probabilidad representa las bases para la construcción de la estadística inferencial.

La **estadística inferencial** es una parte de la estadística que, valiéndose de métodos probabilísticos, predice los resultados de una población, basándose en los datos de una muestra de esa población.

Un ejemplo interesante es el estudio realizado por Subagia y colaboradores, donde examinaron las configuraciones de los helicópteros y la probabilidad de accidentes. Estos investigadores identificaron que los helicópteros con cuatro aspas tienen la probabilidad más baja de accidentes.

Conceptos básicos de probabilidad.

Para poder comprender qué probabilidad hay de que acontezca algo, existen algunas notaciones y conceptos claves en el estudio de la probabilidad:

- La probabilidad se denota con la letra **P**.

- Un **suceso** es cualquier conjunto de resultados o consecuencias de un procedimiento. Por ejemplo, lanzar dos dados y obtener 6 y 6.
- Un **suceso simple** es un resultado o un suceso que ya no puede desglosarse en componentes más simples. Por ejemplo, que salga el número 6 cuando lanzamos un dado.
- El **espacio muestral** de un procedimiento son todos los posibles resultados. Es decir, el espacio muestral está formado por todos los resultados que ya no puede desglosarse más. Por ejemplo todos los posibles resultados de lanzar dos dados:

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

- Los sucesos específicos se denotan por A, B o C. P(A) denota la probabilidad de que ocurra el suceso A.
- La probabilidad de un **suceso imposible es 0**. Por ejemplo, conseguir agua en el Sol tiene una probabilidad de 0.

- La probabilidad de un **suceso seguro es 1**. Por ejemplo, que la Tierra gire alrededor del Sol es seguro.
- La probabilidad de que un suceso no ocurra se conoce como el **complemento** de la ocurrencia del suceso. Por ejemplo, si la probabilidad de ganar la lotería es 0,000001, el complemento es la probabilidad de NO ganar la lotería, esto es, 0,999999.

¿Para qué sirve la probabilidad?

Usamos el cálculo de probabilidades en muchas áreas de nuestra vida:

- En la predicción del clima.
- Cuando se realiza un tratamiento médico o una cirugía.
- Las compañías de seguro.
- En los casinos y juegos de azar.

Conocer las probabilidades de un determinado evento nos permite prepararnos a los resultados o confiarnos del éxito esperado.

Breve historia de la probabilidad

El precursor de las teorías probabilísticas fue el matemático italiano **Girolamo Cardano** (1501-1576).

Los matemáticos **Pierre Fermat** (1601-1665) y **Blaise Pascal** (1623-1662) contribuyeron a desarrollar el concepto de probabilidad a problemas relacionados con los juegos de azar.

El cálculo combinatorial fue desarrollado por **Jacob Bernoulli** (1654-1705) y **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827).

¿Qué es un conjunto?

Un conjunto **es la agrupación de diferentes elementos que comparten entre sí características y propiedades semejantes**. Estos elementos pueden ser sujetos u objetos, tales como números, canciones, meses, personas, etc. Por ejemplo: el conjunto de números primos o el conjunto de planetas del sistema solar.

A su vez, un conjunto puede convertirse también en un elemento. Por ejemplo: en el caso de un ramo de flores, en principio una flor sería el primer elemento, pero al conjunto de flores se lo puede considerar luego como un ramo de flores, convirtiéndose así, en un nuevo elemento.

Para graficar un conjunto se utilizan corchetes para delimitar los elementos que lo conforman, que se separan entre sí mediante comas. Por ejemplo: Se define a "S" como el conjunto de los días de la semana, por lo tanto, S= [lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo].

Teoría de conjuntos.

La teoría de conjuntos **es la rama de la matemática que estudia a los conjuntos**. Fue introducida como disciplina por el matemático ruso Georg Cantor, quien definió al conjunto como la colección de elementos finitos o infinitos y lo utilizó para explicar las matemáticas.

Cantor estudió el conjunto de números racionales y naturales y **fue revolucionario su descubrimiento de los conjuntos de números infinitos**, ya que develó la existencia de infinitos de diferentes tamaños al asegurar que siempre se puede encontrar un infinito mayor.

Los descubrimientos de Cantor no fueron bien recibidos en el ámbito matemático de finales del siglo XIX. Sin embargo, hoy es considerado un visionario en el estudio de lo que él denominó los transfinitos, estudio que contribuyó al de los conjuntos abstractos e infinitos.

Tipos de conjuntos.

Conjuntos y subconjuntos:

Se denomina subconjunto al **conjunto que se encuentra dentro de otro** conjunto, es decir, el conjunto A es subconjunto del conjunto B, si todos los elementos de A están incluidos en B.

Por ejemplo:

- Los mamíferos son un subconjunto del conjunto animales.
- Los números impares son un subconjunto del conjunto números naturales.
- Los países de América del Sur son un subconjunto del conjunto países del mundo.
- Los meses de primavera son un subconjunto del conjunto meses del año.
- Los niños de primer grado son un subconjunto del conjunto de niños de la escuela.

Operaciones con conjuntos:

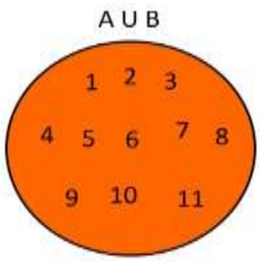
Las operaciones básicas del álgebra de conjuntos son:

- **Unión.** La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B$ que contiene todos los elementos de A y de B.
- **Intersección.** La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$ que contiene todos los elementos comunes de A y B.
- **Diferencia.** La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto $A \setminus B$ que contiene todos los elementos de A que no pertenecen a B.
- **Diferencia simétrica.** La diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene los elementos de A y B que no son comunes.
- **Complemento.** El complemento de un conjunto A es el conjunto A^C que contiene todos los elementos que no pertenecen a A.
- **Producto cartesiano.** El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \times B$ que contiene todos los pares ordenados (a, b) cuyo primer elemento pertenece a A y su segundo elemento pertenece a B

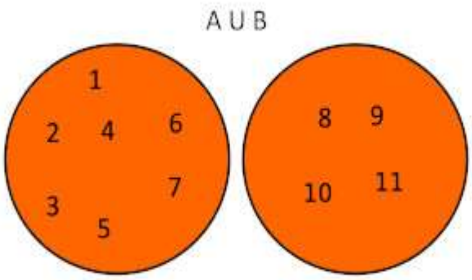
Unión.

Ejemplo 1.

Dados dos conjuntos A={1,2,3,4,5,6,7,} y B={8,9,10,11} la unión de estos conjuntos será AUB={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:

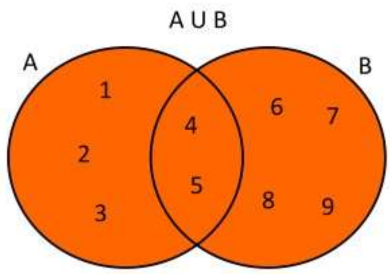


También se puede graficar del siguiente modo:



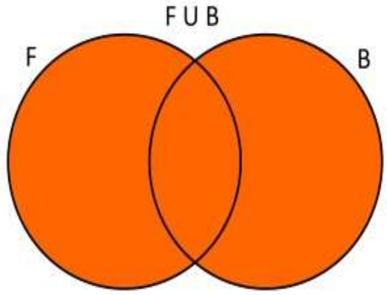
Ejemplo 2.

Dados dos conjuntos A={1,2,3,4,5} y B={4,5,6,7,8,9} la unión de estos conjuntos será A∪B={1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



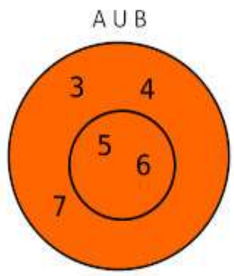
Ejemplo 3.

Dados dos conjuntos F={x/x estudiantes que juegan fútbol} y B={x/x estudiantes que juegan básquet}, la unión será F∪B={x/x estudiantes que juegan fútbol o básquet}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



Ejemplo 4.

Dados los dos conjuntos A={3, 5, 6, 7} y B={5,6}, en donde B está incluido en A, la unión será AUB={3,5,6,7}. Usando diagramas de Venn se tendría

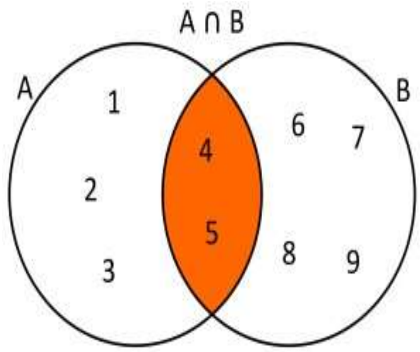


Intercepción.

Es la operación que nos permite formar un conjunto, sólo con los elementos comunes involucrados en la operación. Es decir dados dos conjuntos A y B, la de intersección de los conjuntos A y B, estará formado por los elementos de A y los elementos de B que sean comunes, los elementos no comunes A y B, serán excluidos. El símbolo que se usa para indicar la operación de intersección es el siguiente: ∩.

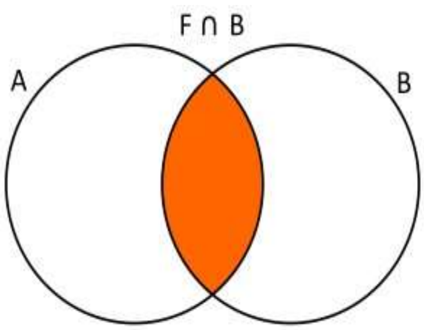
Ejemplo 1.

Dados dos conjuntos A={1,2,3,4,5} y B={4,5,6,7,8,9} la intersección de estos conjuntos será A∩B={4,5}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



Ejemplo 2.

Dados dos conjuntos A={x/x estudiantes que juegan fútbol} y B={x/x estudiantes que juegan básquet}, la intersección será F∩B={x/x estudiantes que juegan fútbol y básquet}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:

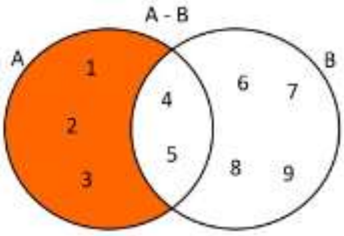


Diferencia de conjuntos.

Es la operación que nos permite formar un conjunto, en donde de dos conjuntos el conjunto resultante es el que tendrá todos los elementos que pertenecen al primero pero no al segundo. Es decir dados dos conjuntos A y B, la diferencia de los conjuntos entra A y B, estará formado por todos los elementos de A que no pertenezcan a B. El símbolo que se usa para esta operación es el mismo que se usa para la resta o sustracción, que es el siguiente: -.

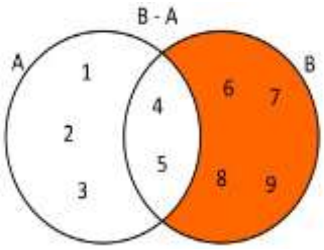
Ejemplo 1.

Dados dos conjuntos A={1,2,3,4,5} y B={4,5,6,7,8,9} la diferencia de estos conjuntos será A-B={1,2,3}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



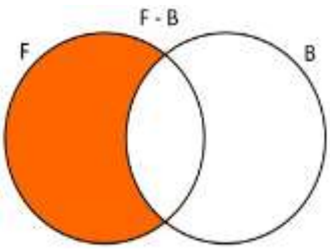
Ejemplo 2.

Dados dos conjuntos A={1,2,3,4,5} y B={4,5,6,7,8,9} la diferencia de estos conjuntos será B-A={6,7,8,9}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



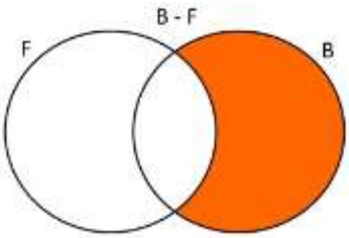
Ejemplo 3.

Dados dos conjuntos F={x/x estudiantes que juegan fútbol} y B={x/x estudiantes que juegan básquet}, la diferencia de F con B, será F-B={x/x estudiantes que sólo juegan fútbol}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



Ejemplo 4.

Dados dos conjuntos F={x/x estudiantes que juegan fútbol} y B={x/x estudiantes que juegan básquet}, la diferencia de B con F, será B-F={x/x estudiantes que sólo juegan básquet}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:

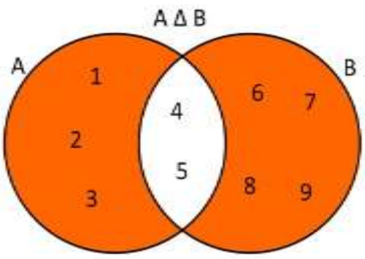


Diferencia de simétrica de conjuntos.

Es la operación que nos permite formar un conjunto, en donde de dos conjuntos el conjunto resultante es el que tendrá todos los elementos que no sean comunes a ambos conjuntos. Es decir dados dos conjuntos A y B, la diferencia simétrica estará formado por todos los elementos no comunes a los conjuntos A y B. El símbolo que se usa para indicar la operación de diferencia simétrica es el siguiente: △.

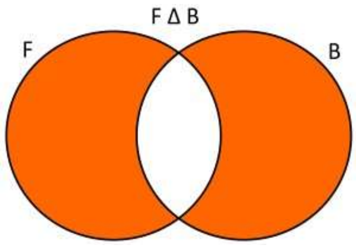
Ejemplo 1.

Dados dos conjuntos A={1,2,3,4,5} y B={4,5,6,7,8,9} la diferencia simétrica de estos conjuntos será A △ B={1,2,3,6,7,8,9}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



Ejemplo 2.

Dados dos conjuntos F={x/x estudiantes que juegan fútbol} y B={x/x estudiantes que juegan básquet}, la diferencia simétrica será F △ B={x/x estudiantes que sólo juegan fútbol y básquet}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:

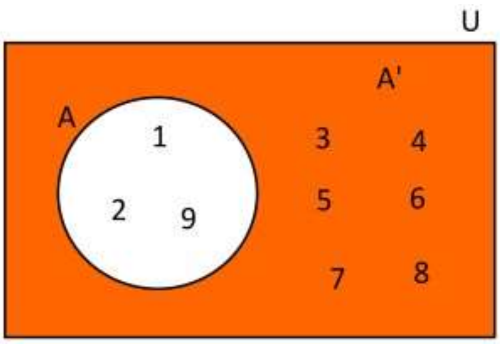


Complemento de un conjunto.

Es la operación que nos permite formar un conjunto con todos los elementos del conjunto de referencia o universal, que no están en el conjunto. Es decir dado un conjunto A que esta incluido en el conjunto universal U, entonces el conjunto complemento de A es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal pero sin considerar a los elementos que pertenezcan al conjunto A. En esta operación el complemento de un conjunto se denota con un apostrofe sobre el conjunto que se opera, algo como esto A' en donde el el conjunto A es el conjunto del cual se hace la operación de complemento.

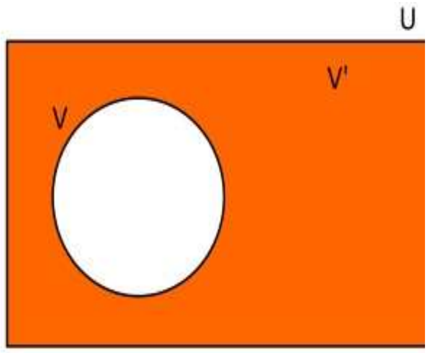
Ejemplo 1.

Dado el conjunto Universal U={1,2,3,4,5,6,7,8,9} y el conjunto A={1,2,9}, el conjunto A' estará formado por los siguientes elementos A'={3,4,5,6,7,8}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



Ejemplo 2.

Dado el conjunto Universal U={x/x estudiantes de un colegio} y el conjunto V={x/x estudiantes que juegan voley}, el conjunto V' estará formado por los siguientes elementos V'={x/x estudiantes que no juegan voley}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



PROBLEMARIO OPERACIONES DE CONJUNTOS

1- Dados los conjuntos A, B, C realice las siguientes operaciones

A { 1 , 2, 3, 4, 5 , 6 }

B { 2 , 4 , 6 , 8 ,10 }

C { 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }

a) (A U B) ⋂ C
b) (B ⋂ C) U (A ⋂ B)

2- U = { a , b , c, d , f , g } A= { a , b , c , d } B = { a , c , e , g } C= { b , e , f , g }

a) A^ — B
b) (A— C) ^
c) (B^ U C)^
d) (A U B) ⋂ (C^ – A^)

3- U= { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 }

A= { 1 , 2 , 5 , 6 , 9 , 10 }

B= { 1 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 }

a) A U B
b) A ⋂ B
c) A — B
d) B – A
e) A^
f) B^

4- A= { 3 , 4 , 5 , 8 , 9 } B= { 5 , 7 , 8 , 9 , 10 }

a) A U B
b) A ⋂ B
c) A – B
d) B – A

5- A = { 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12, 14 }

B = { 3 , 6 , 9 , 12 , 15 }

U = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 }

a) U— A
b) A— B
c) A^
d) B^

6- A= { 3 , 4 , 5 , 8 , 9 } B= { 5 , 7 , 8 , 9 , 10 }

a) A U B
b) A ⋂ B
c) A – B

d) A^

7- A= { 1 , 2 , 3 ,4, 6 }   B = { 3 , 5 , 6 , 7 , 9 }   U= { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 9 }

a) A U B
b) A ⋂ B
c) A – B
d) A^
e) (A – B) U (B – A)
f) (A – B) ^
g) (A ⋂ B) ^

8- Sí A= {3,4,5,6,7} y B= {6,7,8,9}. Determinar

a) A ∪ B =
b) A ∩ B=

9- A={2,4,6,8,10,12,14}, B= {3,6,9,12,15} y U= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}. Determinar

a) A ∪ B =
b) A ∩ B=
c) A'=
d) B'=

10- En el aula de clase hay 34 alumnos, de los cuales 21 son aficionados al futbol, 18 aficionados al baloncesto y 10 aficionados a ambos deportes. ¿Cuántos no son aficionados a ninguno de los deportes? ¿A cuántos estudiantes les gusta un solo deporte?

Diagrama de Venn.

Un diagrama de Venn muestra conjuntos de elementos y sus interacciones por medio de líneas cerradas (círculos), siendo la exterior (cuadrado) la que representa al conjunto universal (U).

Por tanto, este diagrama se basa en la teoría de conjuntos y es muy habitual en matemáticas. Además, también ha demostrado ser útil en el llamado razonamiento diagramático que representa los diferentes conceptos a través de figuras. Además, permite un análisis visual de esos datos por medio de las propiedades de conjuntos como la unión o la intersección.

Características del diagrama de Venn

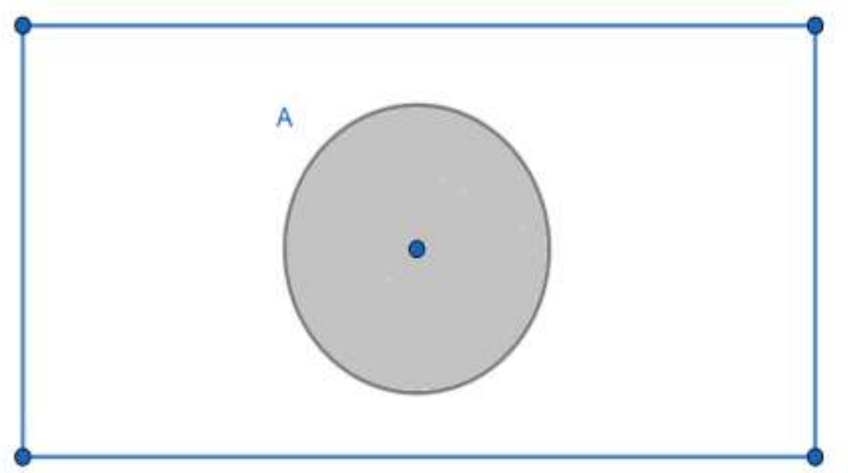
Las principales características del diagrama de Venn son:

- Permite ilustrar la relación entre dos o más conjuntos de elementos.
- Cada conjunto de elementos se representa mediante círculos.
- En las intersecciones de los círculos se ubican aquellos elementos que forman parte de más de un grupo a la vez
- Es una herramienta que se utiliza particularmente en el campo de la estadística, las matemáticas y la lógica.

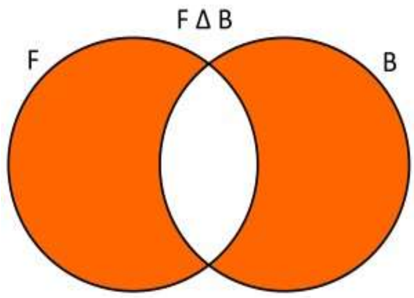
Tipos de diagrama de Venn

Entre los tipos de diagrama de Venn podemos destacar principalmente las siguientes categorías:

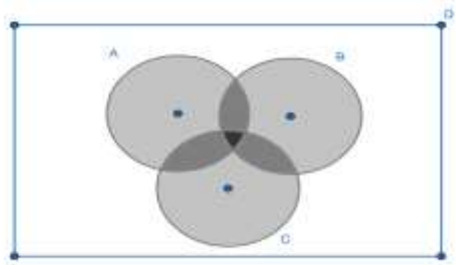
- **De un conjunto:** Cuenta con dos regiones, la región de los elementos que pertenecen al conjunto, y la región de los elementos que están fuera del conjunto.



De dos conjuntos: Tiene un total de 4 regiones: Las regiones con los elementos que solo pertenecen al conjunto A o solo al conjunto B, la región de los elementos que pertenecen a los dos conjuntos (sombreado con el color plomo más oscuro), y la región donde están los elementos que no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos.



De tres conjuntos: Siguiendo la lógica de la categoría anterior, tiene un total de ocho regiones, pues hay cuatro intersecciones (entre dos o entre los tres conjuntos), tres regiones donde están los elementos que pertenecen a solo uno de los tres conjuntos, y una región donde se ubican los elementos que no pertenecen a ningún conjunto.



PROBLEMARIO DE DIAGRAMA DE VENN

1- En una aula hay 60 alumnos de los cuales a 7 no les gusta ni geometria ni aritmetica y a 35 les gusta aritmetica a cuantos les gusta geometria, si a los que les gusta ambos cursos son a 10

2- A la entrada de la escuela, se les aplicó a 156 niños una encuesta respecto a sus juguetes favoritos.La encuesta arrojó los siguientes resultados:

▪ A 52 niños les gustaba el balón; a 63 les gustaban los carritos; a 87 les gustaban los videojuegos.

▪ Además algunos de ellos coinciden en que les gustaba mas de un juguete: 26 juegan con el balón y carritos; 37 juegan con carritos y videojuegos; 23 juegan con el balón y los videojuegos; por ultimo 7 expresaron su gusto por los tres.

a) ¿A cuántos niños les gusta otro juguete no mencionado en la encuesta?

b) ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con los videojuegos?

c) ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con el balón?

3- En un aula hay 34 alumnos, de los cuales 21 son aficionados al futbol, 18 al baloncesto, y 10 a ambos deportes.

-¿Cuántos no son aficionados a ningún deporte? ______________

-¿A cuántos les gusta un solo deporte? _____________________

4- De los 300 integrantes de un club deportivo, 170 practican natación, 140 gimnasia, si 30 no se inscribieron en ninguna de las dos especialidades,

-¿Cuántas se inscribieron en las dos disciplinas?

-¿Cuántas se inscribieron únicamente en natación?

5- De un grupo de 130 personas, a 60 no les gusta la música clásica y 80 no les gusta la música salsa, si a 30 personas solamente les gusta la música clásica

-¿A cuántas personas les gustan los dos tipos de música?

-¿A cuántas personas les gusta únicamente la salsa?

6- En una encuesta realizada a 500 personas, arrojo los siguientes resultados, sobre el resultado que consumen:

280 personas Del frio, 120 personas Heladino , 100 personas Ártico

20 personas H y A, 50 personas D y A, 25 persona D y H, 10 personas las tres marcas

-¿A cuántas personas no consumen ninguna de las tres marcas?

-¿Cuántas personas consumen solo helado ártico?

7- De 200 profesores de una universidad, 115 tiene el grado de doctor, y 60 son investigadores, de los doctores 33 son investigadores. Encuentre la suma de la cantidad de doctores que no son investigadores y la cantidad de investigadores que no son doctores (variables)

8- En un grupo de 60 jóvenes, 40 estudian lenguaje, 23 matemáticas, y 11 los dos cursos cuantos no estudian ningún curso.

9- Una encuesta realizada a 30 estudiantes, sobre el deporte que prefieren el resultado que se obtuvo fue el siguiente: futbol 14, voleibol 14, baloncesto 11, futbol y baloncesto 4, futbol y voleibol 6, baloncesto y voleibol 5, los dos deportes 2

-¿Cuántos prefieren futbol y baloncesto no voleibol?

-¿Cuántas personas prefieren baloncesto y voleibol, pero no futbol?

-¿Cuántos prefieren como máximo un deporte?

10- De un grupo de 100 alumnos, 47 no han escogido informática como optativa, 56 no han escogido teatro como optativa y 27 no han escogido ni informática ni teatro. ¿Cuántos alumnos han escogido sólo un curso?

Diagrama de árbol.

Un árbol de probabilidad o diagrama de árbol es una herramienta que se utiliza para determinar si en realidad en el cálculo de muchas opciones se requiere conocer el número de objetos que forman parte del espacio muestral, estos se pueden determinar con la construcción de un diagrama de árbol.

Realizar un **diagrama de árbol** puede facilitar la toma de decisiones, incluso en los casos más difíciles.

Todos debemos tomar decisiones en diferentes momentos de nuestra vida, el trabajo, los negocios, las empresas, se manejan en base a decisiones que conducen diferentes acciones, una decisión errada puede generar una gran pérdida económica, desaprovechamiento de los recursos e incluso causar un impacto negativo sobre la imagen de la empresa.

Es una representación gráfica de una experiencia que consta de múltiples pasos, donde cada uno de dichos pasos posee varias maneras de llevarse a cabo.

Es decir, se utiliza para **determinar el cálculo de cuantiosas probabilidades** cuando se conocen las opciones de la muestra.

Este instrumento se fundamenta en la probabilidad condicionada, la cual supone que ocurra un evento A, con conocimiento que también ocurre otro evento B. Definidos como eventos dependientes, es decir, para que ocurra un evento A, es preciso que suceda el evento B.

Características de un diagrama de árbol

- Un diagrama de árbol parte de lo general y va hacia lo específico, es decir, la base es el problema y las ramificaciones son los niveles subsecuentes o causas.
- Un diagrama de árbol es útil en la construcción de agrupación, bien sean combinaciones, variaciones o permutaciones.
- Se utiliza en diferentes ámbitos, bien sea científico, económico, social incluso puede ser útil en la toma de decisiones a nivel personal.
- Facilita la toma de decisiones, con el beneficio de que elimina las emociones en la ecuación.
- En general los árboles se usan para evaluar cualquier inquietud, pregunta y/o visualizar los posibles resultados.
- En el mundo de la ciencia, un diagrama de árbol es útil en la resolución de problemas de experimentos compuestos, es decir donde se llevan a cabo más de un experimento aleatorio.
- Resultan una buena herramienta para mantener el equipo de trabajo vinculado con las metas y sub-metas de una tarea, de modo tal que se comprenda en general las acciones llevadas a cabo.
- Particular.

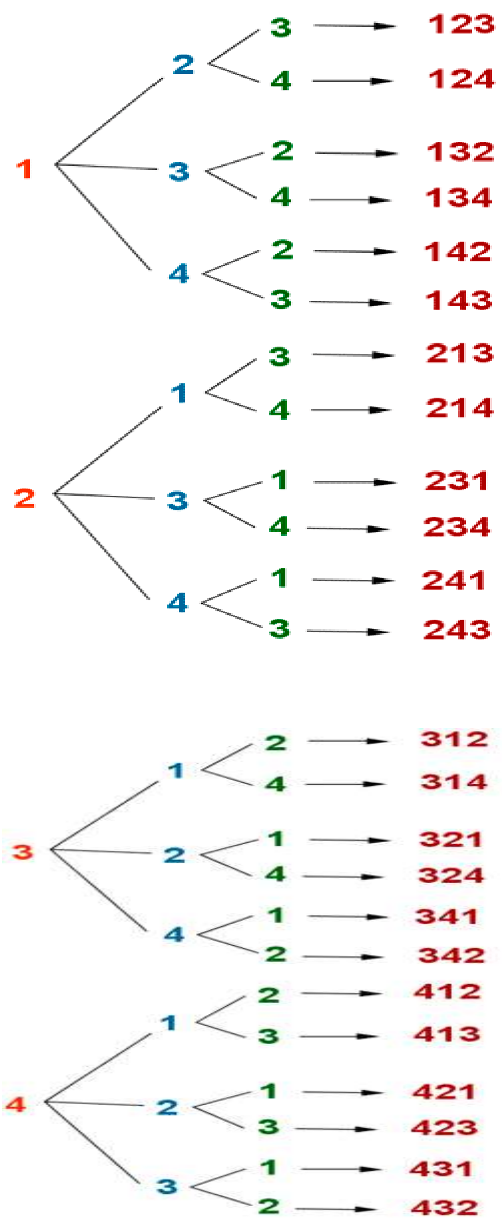
En resumen, se puede decir que un diagrama de árbol constituye un método gráfico, útil en la identificación de todas las partes necesarias en el proceso de lograr un objetivo final.

Las empresas utilizan este método en diferentes procesos y procedimientos, en virtud de que permiten identificar las acciones, tareas y decisiones que son necesarias para desarrollar soluciones y mejoras en el rendimiento y eficiencia de la misma.

En la vida misma se pueden aplicar los diagramas de árbol, como una **herramienta a la hora de elegir, combinar o desechar algunas opciones** que se nos presentan ante sucesos, eventualidades o problemas.

Ejemplo:

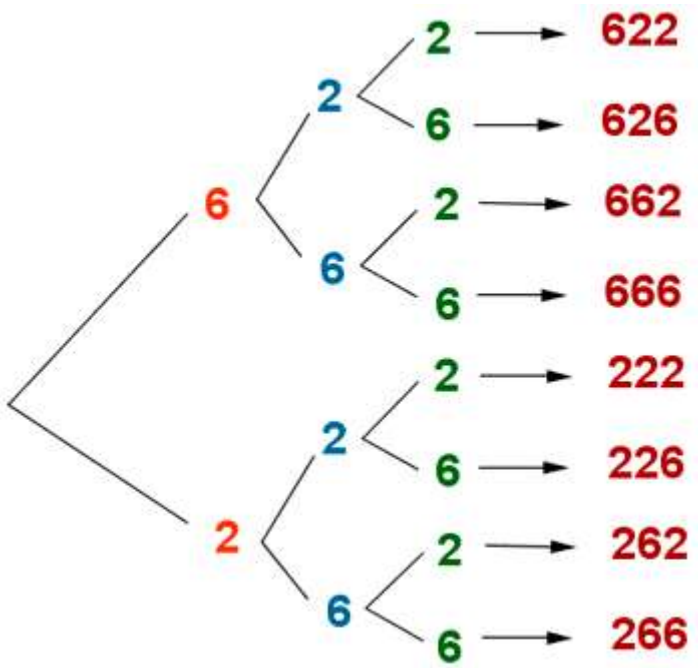
- **Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forme tantos números de tres dígitos como pueda sin repetir ninguno. ¿Cuántos hay? Compruébalo con el diagrama de árbol.**



Con el diagrama de árbol obtenemos 24 números de 3 dígitos. Usando el método del producto: 4·3·2 = 24

O bien utilizando las fórmulas de combinatoria: V3, 4= 4·3·2·1 = 24

- Con los dígitos 6 y 2, forme tantos números de tres dígitos como pueda. ¿Cuántos hay? Compruébalo con el diagrama de árbol.

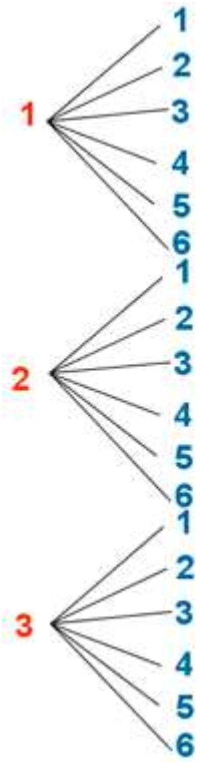


Con el diagrama de árbol obtenemos 8 números de tres dígitos. Usando el método del producto: 2-2-2 = 8

O usando las fórmulas combinatorias:

VR2, 3 = 2 3 = 8

- **Se lanzan al aire 2 dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el resultado de las caras superiores. Forma un diagrama de árbol. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener? ¿Y si son 3 los dados lanzados?**



En el caso de dos dados:

Con el diagrama de árbol obtendríamos 36 resultados

Con las fórmulas combinatorias obtendríamos..:

VR6, 2 = 36 resultados.

Por el método del producto 6-6 = 36 resultados.

Las permutaciones.

Son maneras de distribuir objetos.

Dados n objetos distintos, cualquier forma de ordenarlos se denomina una permutación. Las formas de ordenar r de los n objetos se denominan permutaciones r a r.

Ejemplo: Enumerar todas las permutaciones 2 a 2 de las letras a, b y c.

Solución:

ab, ac, ba, bc, ca y cb

La regla del producto indica el número de pares ordenados que se pueden formar a partir de los conjuntos A y B y es n1 x n2; donde n1 = |A| y n2 = |B|

Ejemplo: Se tienen 3 procesos y 4 computadoras. Hay que asignar cada tarea a una sola computadora y ninguna debe recibir más de un proceso. ¿De cuántas maneras se puede desarrollar esta actividad?

Solución:

Hay 3 x 4 maneras de asignar 3 procesos a 4 computadoras. (Considere una tabla de 3 filas, una por cada proceso, y 4 columnas, una por cada computadora).

Teorema: El número de permutaciones r a r de n objetos diferentes está dado por: P(n,r) = n(n-1)(n-2)….(n-r+1), r ≤n

Ejemplo:

¿De cuántas formas se pueden disponer tres letras del alfabeto inglés? Solución: El alfabeto inglés consta de 26 letras. Por lo tanto, se pueden distribuir 3 letras de P(26,3), esto es 26 · 25 · 24 = 15,600 maneras.

Combinaciones.

Una combinación r a r de un conjunto de n elementos es una selección desordenada de r elementos del conjunto.

Ejemplo: Un departamento consta de 4 personas A, B, C y D. Enumerar todos los comités de tamaño 2 que se pueden formar.

Solución:
{A,B}, {A,C}, {A,D}, {B,C}, {B,D}, {C,D}

Teorema: El número de combinaciones r a r formadas a partir de un conjunto de n objetos está dado por: n! C(n,r) = _________ r! (n-r)!

Ejemplo:
Hay 10 dígitos decimales. ¿Cuántos conjuntos se pueden formar que contengan exactamente 3 de esos dígitos?

Solución:

$C(10, 3) = (10 \cdot 9 \cdot 8) / (1 \cdot 2 \cdot 3) = 120$

O aplicando la fórmula … 10! $C(10, 3) = \dfrac{10!}{3!\,(10-3)!} = 120$

Variación.

En combinatoria, se denomina **variación** a cada una de las tuplas que pueden formarse tomando elementos de un conjunto. En combinatoria de conjuntos finitos frecuentemente se necesita conocer **número de variaciones** de un conjunto de m elementos tomados en tuplas de n elementos (con o sin elementos repetidos en las tuplas). Las **variaciones con repetición** de conjuntos de m elementos tomados en tuplas de n elementos es el número de diferentes n-tuplas de un conjunto de m elementos, este resulta ser:

Combinaciones, permutaciones y variaciones.

1. Entre 10 diputados y 5 secretarios tenemos que formar un comité de 6 personas que contengan al menos 3 diputados y 2 secretarios ¿de cuántas formas podemos elegirlos miembros de este comité?

2. Un entrenador de fútbol quiere presentar una alineación de tres defensas, cuatro centrocampistas, y tres delanteros, si dispone de tres porteros, siete defensas, 10 centrocampistas y seis delanteros. ¿Cuántas alineaciones distintas puede presentar teniendo en cuenta que cada jugador solo puede jugar en su línea correspondiente?

3. ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden formar con los números 2,3,4,6,7,?

4. Una mesa presidencial está formada por 8 personas, ¿de cuántas formas se pueden sentar si el presidente y el secretario siempre estarán juntos?

5. ¿De cuántas formas diferentes se pueden mezclar los colores del arcoíris tomándolos de tres en tres?

6. ¿Cuántos equipos de voleibol se pueden formar a partir de 9 jugadores disponibles?

7. ¿Cuantos números de tres cifras se pueden formar de los números 1,2,3,4,5?

8. ¿De cuántas formas se pueden sentar 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?

9. En una clase de 10 alumnos averiguar de cuantos modos se puede hacer si:
    A) los premios son iguales
    B) los premios son diferentes

10. Hay que colocar a 5 hombres y cuatro mujeres en una fila, de modo que las mujeres ocupen los lugares pares:

Bloque II:

Distribución de probabilidad.

Distribución de Bernoulli.

INTRODUCCIÓN

Vamos a partir de un ensayo de Bernoulli, es decir, de un experimento que tiene solo 2 resultados posibles, a uno de ellos lo llamaremos éxito y al otro fracaso.

Por ejemplo, voy a realizar un experimento bien facilito que consiste en preguntar a un suscriptor de este canal seleccionado al azar si le gusta la pizza. Si me dice que si, lo considero un éxito, si me que no, lo considero un fracaso. Otro ensayo de Bernoulli sería lanzar mi moneda que de un lado tiene gato y del otro lado tiene perro. Si defino perro como éxito, obtener un gato será un fracaso.

Se denomina ensayo de Bernoulli a todo experimento aleatorio que tiene solo dos resultados posibles mutuamente excluyentes, generalmente llamados éxito y fracaso.

En un ensayo de Bernoulli vamos a definir la variable aleatoria X de la siguiente manera:

- sí obtenemos un éxito, la variable aleatoria X vale 1.
- caso contrario, si el ensayo termina en fracaso, la variable aleatoria X vale 0.

De manera sencilla podemos decir que X cuenta el número de éxitos. Si sale fracaso, el número de éxitos sería 0, no hay ningún éxito. Si el experimento termina en éxito, hay 1 éxito.

A continuación, vamos a elaborar una tabla muy sencilla con los valores de X en un ensayo de Bernoulli:

	Fracaso	Éxito
x	0	1

La probabilidad de éxito se denota por p, por ello, la probabilidad de fracaso será 1-p. Agregamos esta información a la tabla:

	Fracaso	Éxito
x	0	1
$f(x)$	$1-p$	p

Y listo, ya tenemos la distribución de probabilidad de Bernoulli representada mediante una tabla. Si queremos la función de probabilidad (una fórmula), sería la siguiente:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1-p; & x = 0 \\ p; & x = 1 \end{cases}$$

2) Distribución de probabilidad de Bernoulli

Una variable aleatoria discreta X tiene una distribución de Bernoulli si su función de probabilidad está dada por:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1-p; & x = 0 \\ p; & x = 1 \end{cases}$$

De forma resumida, se puede colocar de la siguiente manera:

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}; \quad con\ x = 0;\ 1$$

Para indicar que la variable aleatoria X sigue una distribución de Bernoulli de parámetro p usamos la siguiente notación:

$$X \sim Be(p)$$

3) Media y varianza de una variable aleatoria de Bernoulli

Si X tiene una distribución de Bernoulli de parámetro p, entonces:

$$Media: \mu = E(x) = p$$

$$Varianza: \sigma^2 = p(1-p)$$

Listo, ya fue demasiada teoría, vamos con los problemas:

4) Ejemplo

Un juego consiste en lanzar un dado una sola vez, si se obtiene un 3 se gana el juego, si se obtiene otro valor, se pierde. Sea X = el número de veces que sale un 3. Determinar la distribución de probabilidad de X.

Solución:

Vamos a considerar un éxito si se obtiene un 3, con cualquier otro resultado, consideraremos un fracaso. Como X cuenta el número de veces que sale un 3, puede tomar dos valores:

- X = 0, cuando no se obtenga 3.

- X = 1, cuando se obtenga un 3.

Armamos nuestra tabla:

	Fracaso (⚀;⚁;⚃;⚄;⚅)	Éxito (⚂)
x	0	1

Ahora asignamos probabilidades, calculamos primero la probabilidad de éxito p, es decir, la probabilidad de obtener un 3 al lanzar un dado:

$$p = \frac{n^{\circ}\ de\ casos\ favorables}{n^{\circ}\ total\ de\ casos\ posibles}$$

$$p = \frac{1}{6}$$

Recuerda que la probabilidad de fracaso será 1 – p. Completamos la tabla asignando probabilidades f(x).

	Fracaso (⚀;⚁;⚃;⚄;⚅)	Éxito (⚂)
x	0	1
$f(x)$	$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ya tenemos la distribución de probabilidad expresada con una tabla.

Vamos en búsqueda de la función de probabilidad, sabemos de la tabla que:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{5}{6}; & x = 0 \\ \frac{1}{6}; & x = 1 \end{cases}$$

También le podemos dar la siguiente forma compacta equivalente:

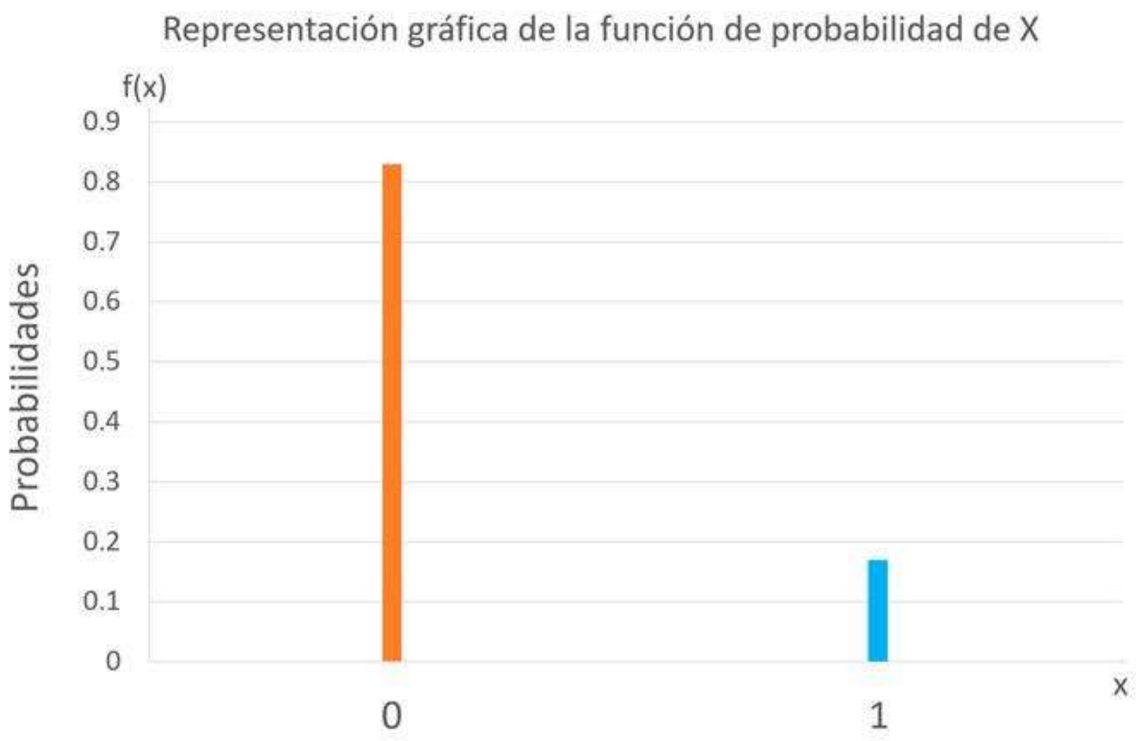
$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}^{x} \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x} \quad ; \qquad x = 0; 1$$

Como vemos, la función de probabilidad de X tiene la forma de una función de probabilidad de Bernoulli con probabilidad de éxito p de 1/6. Por lo tanto:

Esa sería la respuesta, la variable aleatoria X sigue una distribución de Bernoulli con una probabilidad de éxito de 1/6.

$$X \sim Be\left(\frac{1}{6}\right)$$

El problema no lo pide, pero, así como hemos representado la función de probabilidad de X mediante una tabla y mediante una fórmula, también lo podemos hacer mediante un diagrama de barras. Colocamos un eje horizontal para los valores de X y otro vertical para las probabilidades f(x).



Ejemplos:

1- Se escoge a un alumno de este grupo que le guste la pizza, la probabilidad de que le guste es de 0.8, ¡cuánto será la probabilidad de que no les guste la pizza, si el total debe ser de 1 , 0.2 de probabilidad de fracaso?

1– 0.8 = 0.2

2- Cuando se lanza un dado hay la probabilidad de ⅙ de que salga 6, X= 1, si el dad0 cae 6, X= 0, si cae cualquier otro número, ¿Cuál es la distribucion de X?

DADO		
X		
f (x) = P (X = x)		

-Núm. De veces que sale 6, al lanzar el dado una vez:

3- Se lanza al aire una moneda de 5 y de 10 pesos, sea X = 1 , si sale sol en ambas monedas , X = 0 , en cualquier otro caso:

 = { A,A , SS , AS , S,A }
P = sol en ambas monedas = 1 /4 = 0.25
q = cualquier otro caso = (1–p) = 3 /4 = 0.75

4- En una rifa donde el premio es una computadora, participan 123 personas, (persona 1, persona 2…persona 123), de los cuales solo uno será el ganador, cual es la probabilidad de que la persona 100 gane el premio.

PROBLEMARIO DISTRIBUCION BERNOULLI

1- Supongamos que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamblaje es de 0.05. Si el conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que entre diez unidades dos se encuentren defectuosas?

b) ¿Y de que a lo sumo dos se encuentren defectuosas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

2- Una maquina produce el 5% de piezas defectuosas, cual es la probabilidad de que al tomar tres piezas producidas por esa máquina:

a) ¿Las tres estén bien hechas?

b) ¿Una salga defectuosa?

3- La probabilidad de que un estudiante, obtenga una beca es del 35% .En una muestra de 15 estudiantes cual es la probabilidad de que uno o dos estudiantes obtengan una beca?

4- Luis y Juan, lanzaran un dado al aire por lo tanto decidieron hacer una apuesta, Luis ganara la apuesta si cae un número menor de tres, y Juan ganara si cae un número igual o mayor de tres?, ¿Cuál es la probabilidad de éxito para Luis?

5- Se sabe que el 95%, de la producción de la maquina es conforme, si se toma una pieza al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

6- Se sabe que, en la manufactura de cierto producto, uno de cada 10 resulta defectuoso, Calcula la probabilidad de que una muestra de cuatro, contenga:

a) ninguno defectuoso:

b) no más de dos defectuoso:

c) más de uno defectuoso:

d) todos buenos:

Distribución binomial.

Una distribución binomial es una distribución discreta que modela el número de eventos en un número de ensayos fijo. Cada ensayo tiene dos resultados posibles, y evento es el resultado de interés en un ensayo.

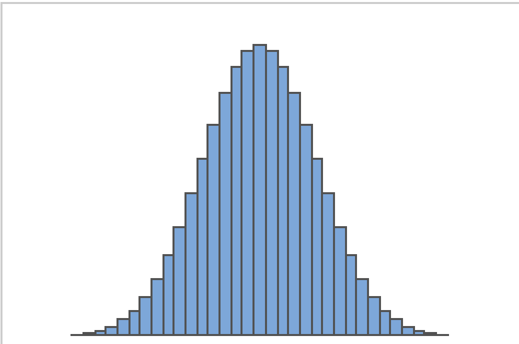
Utilice la distribución binomial para describir un proceso donde los resultados se pueden etiquetar como un evento o un no evento y cuando esté interesado en la ocurrencia de un evento y no en su magnitud. Por ejemplo, un elemento pasa o no pasa una inspección o un partido político gana o pierde. La distribución binomial se usa frecuentemente en control de calidad, sondeos de opinión pública, investigaciones médicas y seguros.

Por ejemplo, utilice la distribución binomial para calcular la probabilidad de que 3 o más elementos defectuosos se encuentren en una muestra de 25 elementos si la probabilidad de un elemento defectuoso en cada ensayo es 0.02. El número de elementos defectuosos (X) sigue una distribución binomial con n = 25 y p = 0.02.

El número de eventos (X) en n ensayos sigue una distribución binomial si se cumplen las siguientes condiciones:

- El número de ensayos es fijo.
- Cada ensayo es independiente de otros ensayos.
- Cada ensayo tiene uno de dos resultados: evento o no evento.
- La probabilidad de un evento es igual para cada ensayo.

Una de las propiedades de la distribución binomial es que cuando n es grande, la distribución binomial puede ser aproximada razonablemente por la distribución normal. Por ejemplo, para la siguiente distribución binomial, n = 100 y p = 0.5.



Importante

Es importante destacar que el resultado “**no éxito**” no se refiere al contrario de “éxito”, sino que se refiere a cualquier caso **distinto** al que representa a “éxito” siempre y cuando haya más de dos posibilidades.

Es decir, en el caso de tirar un dado, si la variable “éxito” se refiere a obtener un cuatro (4) en una tirada, la variable “no éxito” será cualquier resultado distinto a cuatro (4) que podamos obtener en una tirada.

Espacio muestral: {1,2,3,4,5,6}.

En el caso de una moneda (no trucada), solo podremos obtener dos resultados posibles: cara o cruz. Entonces, en este caso la variable “no éxito” será efectivamente el contrario de la variable “éxito”.

Espacio muestral: {1,2}.

Fórmula del parámetro p y la Regla de Laplace:

Para obtener el parámetro p utilizamos la Regla de Laplace:

$$p = \frac{casos\ probables}{casos\ posibles}$$

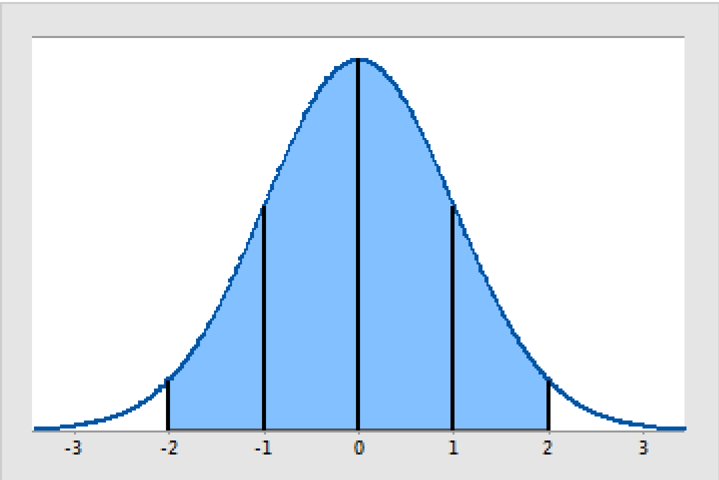
Regla de Laplace.

Casos posibles: Son todos los resultados posibles que podemos obtener en un experimento. Por ejemplo, si el experimento es tirar un dado, tendremos seis (6) casos posibles porque un dado solo tiene seis (6) caras.

Casos probables: Son los resultados que salen en cada experimento de manera **secuencial**, es decir, que los resultados son **excluyentes**: si ocurre un resultado no pueden ocurrir los otros. En el experimento de tirar un dado, cada cara del dado es un caso probable. En otras palabras, que salga un dos (2) o un cinco (5) son ejemplos de casos probables en el experimento de lanzar un dado.

¿Qué es la distribución normal?

La distribución normal es una distribución con forma de campana donde las desviaciones estándar sucesivas con respecto a la media establecen valores de referencia para estimar el porcentaje de observaciones de los datos. Estos valores de referencia son la base de muchas pruebas de hipótesis, como las pruebas Z y t.



Histograma de una distribución normal hipotética.

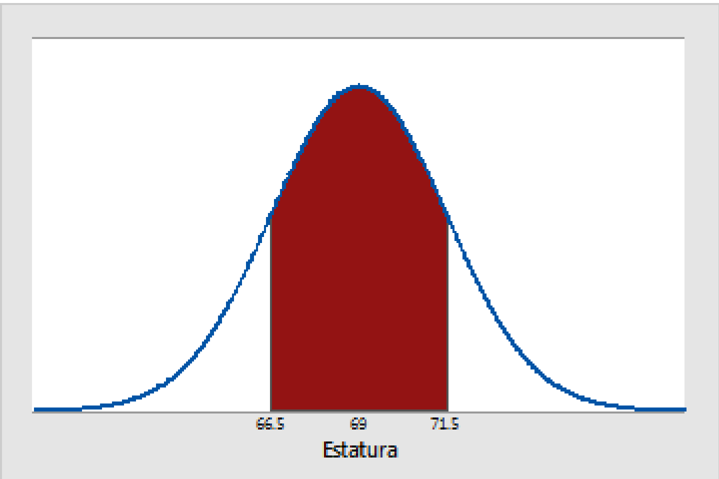
Puesto que la distribución de estos datos es normal, usted puede determinar exactamente qué porcentaje de los valores está dentro de cualquier rango específico. Por ejemplo:

- Alrededor del 95% de las observaciones está dentro de 2 desviaciones estándar de la media, indicado por el área sombreada en azul. El 95% de los valores se ubicará dentro de 1.96 desviaciones estándar con respecto a la media (entre −1.96 y +1.96). Por lo tanto, menos del 5% (0.05) de las observaciones estará fuera de este rango. Este rango es la base del nivel de significancia de 0.05 que se utiliza para muchas pruebas de hipótesis.

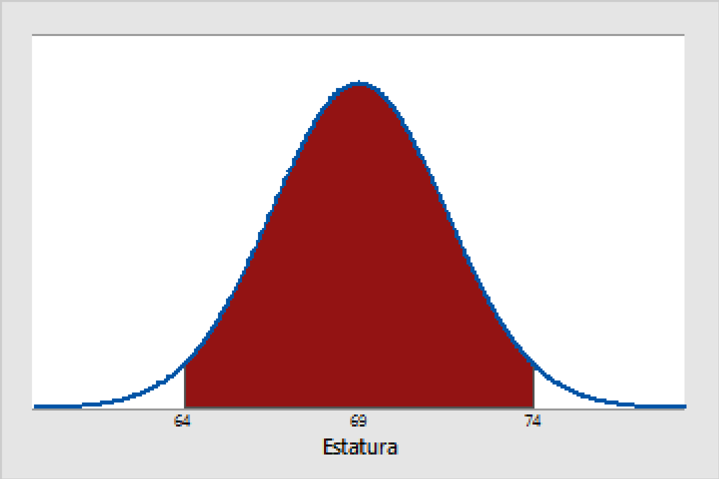
- Aproximadamente el 68% de las observaciones está dentro de una 1 desviación estándar de la media (-1 a +1), y alrededor del 99.7% de las observaciones estarían dentro de 3 desviaciones estándar con respecto a la media (-3 a +3).

Ejemplo de una distribución normal.

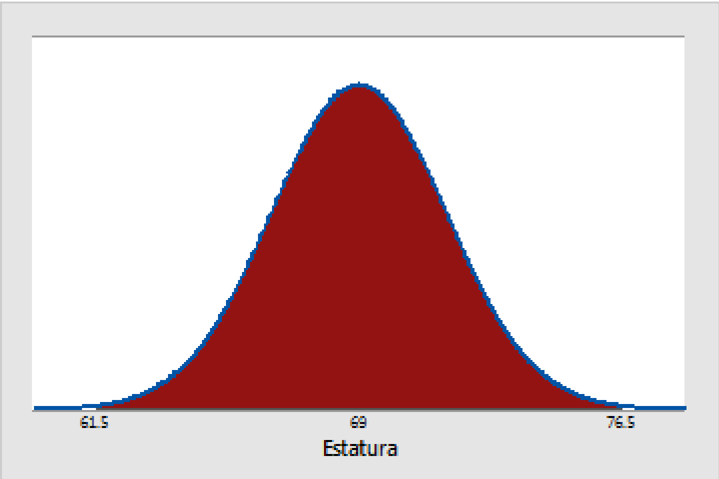
La estatura de todos los adultos masculinos que residen en el estado de Pennsylvania siguen aproximadamente una distribución normal. Por lo tanto, la estatura de la mayoría de los hombres estará cerca de la estatura media de 69 pulgadas. Un número similar de hombres serán un poco más altos y un poco más bajos que 69 pulgadas. Solo unos pocos serán mucho más altos o mucho más bajos. La desviación estándar es de 2.5 pulgadas.



Aproximadamente, el 68% de los hombres de Pennsylvania tiene una estatura de entre 66.5 (μ - 1σ) y 71.5 (μ + 1σ) pulgadas.



Aproximadamente, el 95% de los hombres de Pennsylvania tiene una estatura de entre 64 (μ - 2σ) y 74 (μ + 2σ) pulgadas.



Aproximadamente, el 99.7% de los hombres de Pennsylvania tiene una estatura entre 61.5 (μ - 3σ) y 76.5 (μ + 3σ) pulgadas.

PROBLEMARIO DE DISTRIBUCIÓN NORMAL.

1- Dada una variable aleatoria continua z. con distribucion normal estándar, es decir N (1 ,0), encuentre las siguientes probabilidades utilizando las tablas:

a) $P(0 \leq Z \leq 1.25)$

b) $P(Z \geq 1.25)$

c) $P(Z \leq -1.25)$

2- El peso de cierto modelo de baterías, sigue una distribucion normal, con una media de 6 y una desviación estándar de 2:

a) Determine el porcentaje de baterías cuyo peso es mayor a 8 grs.

3- Los precios de las acciones de una empresa se distribuyen en forma normal, con una media de 20 y una desviación estándar de 3 pesos,

a) ¡Cuál es la probabilidad de que el precio de las acciones de esta empresa se encuentre entre 18 y 20 pesos?

4- Los salarios mensuales de los recién graduados que acceden a su primer empleo se distribuyen según una ley normal de media 1300 € y desviación típica 600 €. Calcular el porcentaje de graduados que cobran:

a) Menos de 600 € al mes

b) Entre 1000 y 1500 € al mes

c) Más de 2200 € al mes

5- Se estima que el tiempo en horas que se necesita para memorizar un tema de Historia de la Filosofía es una variable aleatoria normal, cuya media y varianza se desconocen. Calcular la media y la desviación típica de esta distribución si se sabe que las tres cuartas partes de las estudiantes necesitan más de 3 horas y que el 5% necesita más de 6 horas para memorizarlo.

Se estima que el tiempo en horas que se necesita para memorizar un tema de Historia de la Filosofía es una variable aleatoria normal, cuya media y varianza se desconocen.
Calcular:

a) La media y la desviación típica de esta distribución si se sabe que las tres cuartas partes de las estudiantes necesitan más de 3 horas y que el 5% necesita más de 6 horas para memorizarlo.

6- Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de 2º de Bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide determinar:

a) el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso está comprendido entre los 68 y 80 kg.

b) Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones que se han presentado a la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.

c) Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?

7- Haciendo uso de la tabla que proporciona áreas a la izquierda de cada valor z de la distribución normal tipificada, calcular las probabilidades (áreas) siguientes:

a) $Pr(z<1'35)$
b) $Pr(z<-0'338)$
c) $Pr(z>2'1)$
d) $Pr(z>-1)$
e) $Pr(-1'39<z\leq-0'44)$
f) $Pr(-1'52\leq z\leq 0'897)$

8- Las calificaciones de los 500 aspirantes presentados a un examen para contratación laboral, se distribuye normalmente con media 6'5 y varianza 4.
Calcule:

a) La probabilidad de que un aspirante obtenga más de 8 puntos.

b) Determine la proporción de aspirantes con calificaciones inferiores a 5 puntos.

c) ¿Cuántos aspirantes obtuvieron calificaciones comprendidas entre 5 y 7'5 puntos ?

9- Sólo 24 de los 200 alumnos de un Centro miden menos de 150 cm. Si la estatura media de dichos alumnos es de 164 cm., ¿Cuál es su varianza?

10- Calcula en una N(0, 1) las siguientes probabilidades

a) $P(Z \geq 1,77)$

b) $P(Z \leq -1,86)$

c) $P(Z \geq -0,25)$

d) $P(Z \geq 2,34)$

e) $P(Z \leq -1,15)$

f) $P(Z \geq -1,76)$

Bloque III:

Modelos

Probabilísticos.

Probabilidad condicional.

La probabilidad condicional, o probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un evento, al que denominamos A, como consecuencia de que ha tenido lugar otro evento, al que denominamos B.

Es decir, la probabilidad condicional es aquella que depende de que se haya cumplido otro hecho relacionado.

Si tenemos un evento, que denominamos A, condicionado a otro evento, al cual denominamos B, la notación sería P(A|B) y la fórmula sería la siguiente:

$P(A|B)=P(A \cap B)/P(B)$

Es decir, en la fórmula de arriba se lee que la probabilidad de que suceda A, dado que ha acontecido B, es igual a la probabilidad de que ocurra A y B, al mismo tiempo, entre la probabilidad de B.

Lo opuesto a la probabilidad condicional es la probabilidad independiente. Es decir, aquella que no depende de la ocurrencia de otro evento.

Ejemplo de probabilidad condicional:

A continuación, veamos un ejemplo de probabilidad condicional.

Supongamos que tenemos un aula con 30 alumnos, siendo el 50 % de 14 años y el otro 50% de 15 años. Además, sabemos que 12 integrantes del salón tienen 14 años y usan resaltador en sus libros ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante del salón use resaltador si tiene 14 años?

Siguiendo la fórmula mostrada líneas arriba, primero, sabemos que la probabilidad de que el estudiante tenga 14 años es 50%(P(B)). Asimismo, la probabilidad de que un estudiante tenga 14 años y use resaltador es 12/30=40%.

Por lo tanto, la probabilidad de que un estudiante use resaltador si tiene 14 años se calcularía de la siguiente forma:

$P(A|B)=P(A \cap B)/P(B)=0,4/0,5=0,8=80\%$

Es decir, existe un 80% de probabilidad de que un estudiante use resaltador si tiene 14 años.

Propiedades de la probabilidad condicional

Las propiedades de la probabilidad condicional son las siguientes:

Esto significa que la probabilidad de A dado B, más la probabilidad del complemento de A (los elementos del universo que no pertenece a A) dado B, es igual a 1.

Esta propiedad implica que si A es un subconjunto de B (o son dos conjuntos iguales), la probabilidad de que ocurra A dado B es 1.

$$P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$

Lo anterior quiere decir que la probabilidad de A es igual a la probabilidad de A dado B por la probabilidad de B más la probabilidad de A, dado el complemento de B por el complemento de B.

PROBLEMARIO

1- En un colegio, la probabilidad de que un alumno consuma mayonesa es del 65%, la probabilidad de que consuma cátsup es del 70%, y la posibilidad de que consuma ambas es de 55%, calcular la probabilidad de que consuma mayonesa dado que consume cátsup.

2- En un taller, se elaboran 1000 camisetas a partir de la tabla calcula:

a) La probabilidad de que una camiseta escogida al azar sea defectuosa
b) Probabilidad de que una camiseta seleccionada al azar sea del Manchester
c) Si un hincha compra una camiseta del Manchester ¿cuál es la probabilidad de que este defectuosa?
d) Si un hincha compra una camiseta del Juventus ¿cuál es la probabilidad de que este defectuosa?

3- De una baraja de 48 cartas se extraen simultáneamente dos de ellas.

Calcular la probabilidad de que:

a) Las dos sean copas

b) Al menos una sea copa

c) Una sea copa y la otra espada

4- Una clase está formada por 10 chicos y 10 chicas; la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han elegido francés como asignatura optativa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea chico o estudio francés?

b) ¿Y la probabilidad de que sea chica y no estudie francés?

5- - En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90% de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son chicos y de los que estudian francés son chicos el 40%. El elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

6- - Un taller sabe que por término medio acuden: por la mañana tres automóviles con problemas eléctricos, ocho con problemas mecánicos y tres con problemas de chapa, y por la tarde dos con problemas eléctricos, tres con problemas mecánicos y uno con problemas de chapa.

a) Hacer una tabla ordenando los datos anteriores.
b) Calcular el porcentaje de los que acuden por la tarde.
c) Calcular el porcentaje de los que acuden por problemas mecánicos.
d) Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana.

7- Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la segunda bola sea verde.
b) Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

8- **El 75% de los pacientes de un hospital dieron positivo para sarampión, y el 68% positivo para coronavirus. El porcentaje de pacientes que resultaron positivo para sarampión habiendo sido positivos para coronavirus es del 85%. Si Juan sabe que es positivo para sarampión, ¿qué probabilidad tiene de haber sido positivo para coronavirus?(regla del producto)**

Teorema de Bayes.

El teorema de Bayes es una proposición que se emplea para calcular la probabilidad condicional de un suceso y fue desarrollado por el matemático y teólogo británico Thomas Bayes. El principal objetivo de este teorema es determinar la probabilidad que posee un suceso comparada con la probabilidad de otro suceso similar.

En otras palabras, **permite conocer la probabilidad condicional** de un evento o suceso determinado como A dado B, en el que se analiza la distribución de probabilidad del suceso B dado A.

El teorema de Bayes es muy útil, puesto que aplicándolo de la manera correcta se puede conocer la probabilidad de que un suceso A pase, teniendo presente lo ocurrido durante el evento B. Asimismo, existe la probabilidad de que suceda lo contrario, donde ocurra B dado A.

Fue propuesto por Thomas Bayes, un conocido teólogo y matemático inglés del siglo VIII. Bayes destacó tanto en la teología como en las matemáticas con distintos trabajos, entre los que destaca este teorema.

Fórmula del teorema de Bayes.

La fórmula de Bayes, también conocida como la *regla de Bayes*, es un procedimiento propuesto por el matemático inglés para determinar la probabilidad de un suceso. En la fórmula de Bayes intervienen 3 probabilidades distintas, las cuales son:

- P (Ai), que es la probabilidad que representa a priori de un suceso A.
- P (Ai/B), que es la probabilidad que representa a posteriori de un suceso A. Es decir, la información de lo sucedido en un evento B.
- P (B/Ai), que es la probabilidad de un suceso B con base en la información del suceso A.

La fórmula permite calcular la probabilidad condicional P (Ai/B) de los sucesos A dado B.

Ventajas de la aplicación del teorema de Bayes

- Si se ajusta de manera correcta, las ganancias de una empresa aumentarán, ya que se podrá determinar qué estrategias tienen más posibilidades de ser exitosas.
- Se puede analizar la información de forma continua; eso sí, en el caso de que la variabilidad entre datos esté elevada, entonces es recomendable implementar algunos métodos que permitan encontrar las mejores soluciones.
- Los estudios de decisión se ven beneficiados al aplicar el **teorema de Bayes**.
- Es posible buscar y acumular información de todo tipo para entender y solucionar un problema.

Debilidades del teorema.

- La fórmula es muy criticada, puesto que posee algunas limitaciones. Así se le critica que solamente se puede aplicar si existen sucesos exhaustivos y disjuntos.
- Los especialistas en estadística tradicional piensan que el **teorema de Bayes** no es del todo exacto, pues creen que las únicas estadísticas correctas son las que están basadas en experimentos repetibles, más no en condiciones relativas, como es el caso de las estadísticas obtenidas mediante este teorema.

Aplicaciones del teorema.

Este teorema busca determinar las probabilidades de que un suceso ocurra o no, analizando algunas ocasiones un suceso anterior. Eso quiere decir que se analiza bastante información.

El teorema de Bayes es **posible aplicarlo** en todo tipo de áreas estudio, como **en las inversiones financieras**, puesto que se requiere analizar todo tipo de escenarios, al igual que estudiar los hechos pasados.

En las empresas, el teorema es eficaz al analizar el proceso productivo, puesto que existe la opción de mejorarlo y eso se realiza mediante el estudio de las probabilidades. Asimismo, **la publicidad** de una empresa es posible analizarla y mejorarla a través de la aplicación del teorema.

La fórmula propuesta por Bayes no se empleó con recurrencia durante el siglo XVIII y XIX, pues en esa época el teorema no poseía una aplicación clara. Sin embargo, conforme transcurrieron los años, su uso se empezó a implementar en diferentes ciencias, sobre todo con los avances tecnológicos.

Importancia del teorema.

Es importante porque permite resolver problemas en los que existen una gran variedad de probabilidades, siendo así fundamental en todas las ciencias, ya que se analizan los sucesos pasados para determinar las probabilidades de los sucesos del futuro.

Ejemplo del teorema de Bayes.

Un ejemplo sencillo del **teorema de Bayes** es: una persona posee tres cajas con pelotas. En la caja 1 se encuentran diez pelotas, entre las cuales hay cuatro desinfladas; en la caja 2 están seis pelotas, entre las cuales hay una desinflada; y en la caja 3 se encuentran ocho pelotas, estando desinfladas tres. Si una persona recoge una pelota desinflada, ¿cuál sería la probabilidad de que sea una perteneciente a la caja número 1?

La solución del problema es:

Las cajas se representarán de la siguiente manera:

- C1 (Caja 1)
- C2 (Caja 2)
- C3 (Caja 3)

Por otro lado, las pelotas serán representadas así:

- B (Pelotas no desinfladas)
- F (Pelotas desinfladas)

De acuerdo al teorema de Bayes, la fórmula sería:

$$P(C1/F) = \frac{P(C1) \cdot P(F/C1)}{P(C1) \cdot P(F/C1) + P(C2) \cdot P(F/C2) + P(C3) \cdot P(F/C3)}$$

Al reemplazarlo por los datos de las pelotas, la fórmula sería:

$$P(C1/F) = \frac{1/3 \cdot 4/10}{1/3 \cdot 4/10 + 1/3 \cdot 1/6 + 1/3 \cdot 3/8} = \frac{4/30}{113/360} = \frac{48}{113} = 0{,}425$$

Eso quiere decir que la probabilidad de que una persona tome una pelota desinfladas de la caja número 1 es de 42,5%.

PROBLEMARIO TEOREMA DE BAYES.

1- El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

2- La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es $0,1$. La probabilidad de que suene esta sí se ha producido algún incidente es de $0,97$ y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es $0,02$.

En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Sean los sucesos:

$I =$ Producirse incidente.

$A =$ Sonar la alarma.

3- En la academia de Matemóvil, la probabilidad de que a un alumno seleccionado al azar le guste el helado es del 60 %, mientras que la probabilidad de que a un alumno le guste la torta es del 36 %. Además, se sabe que la probabilidad de que a un alumno le guste la torta dado que le gusta el helado es del 40 %. Calcular la probabilidad de que a un alumno le guste el helado, dado que le gusta la torta.
Primero definimos los 2 eventos con los que vamos a trabajar:

- h: que a un alumno le guste el helado.
- t: que a un alumno le guste la torta.

4-Para ir a clase, un estudiante utiliza su coche el 70 % de los días, mientras que va en autobús el resto de los días. Cuando utiliza su coche, llega tarde el 20 % de los días, mientras que si va en autobús llega a tiempo el 10 % de los días. Elegido un día al azar:

a) Calcular la probabilidad de que el estudiante llegue tarde.

b) Sabiendo que ha llegado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en autobús?

c) Sabiendo que ha llegado tarde ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en coche?

5- La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento.

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio.

c) Si un barco es de tonelaje medio calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento.

6- En tres máquinas, A, B y C, se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es, respectivamente, 1%, 2% y 3%. Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina, y se elige una pieza al azar, que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina A?

7- En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que, da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas; y da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

Distribución de Poisson.

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que modeliza la frecuencia de eventos determinados durante un intervalo de tiempo fijado a partir de la frecuencia media de aparición de dichos eventos.

En otras palabras, la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que, tan solo conociendo los eventos y su frecuencia media de ocurrencia, podemos saber su probabilidad.

Expresión de la distribución de Poisson.

Dada una variable aleatoria discreta X decimos que su frecuencia se puede aproximar satisfactoriamente a una distribución de Poisson, tal que:

$X \sim \wp(\mu)$ *Expresión de la distribución de Poisson*

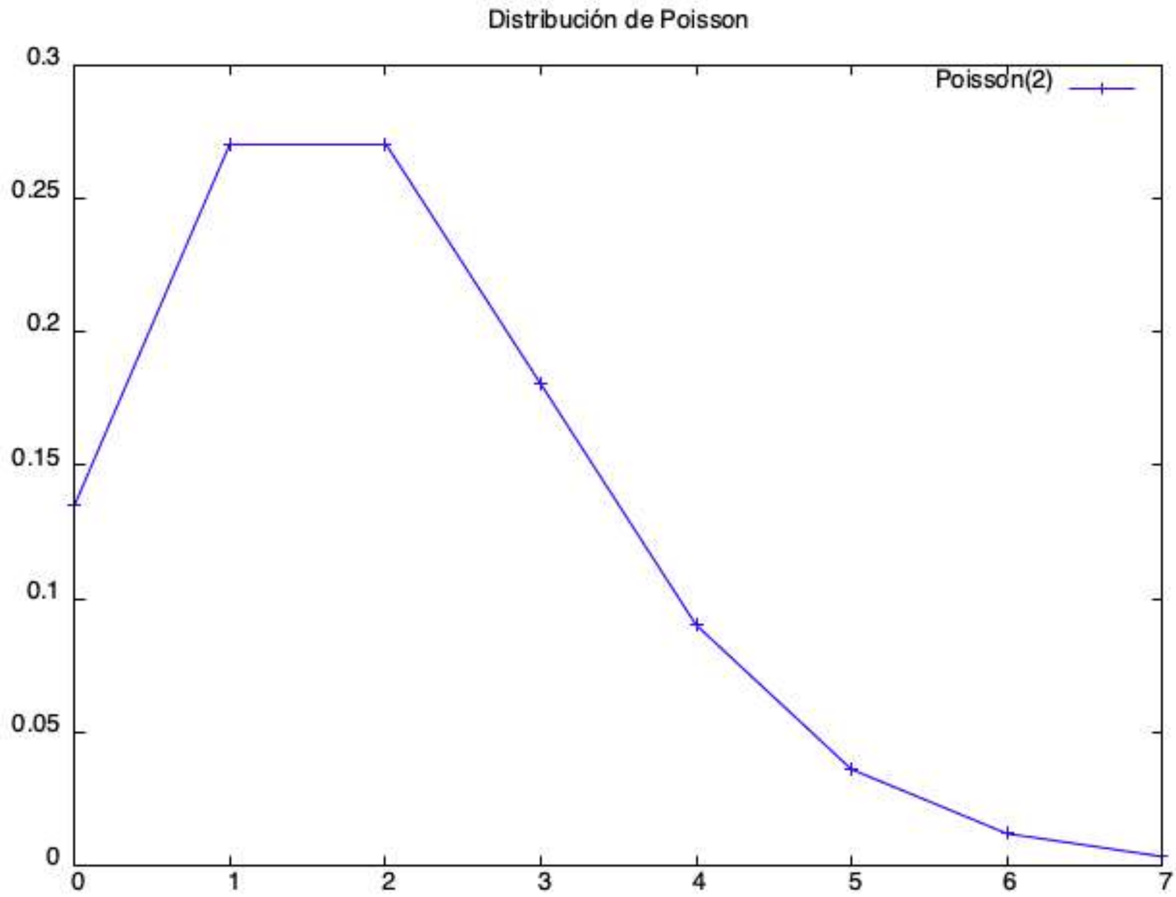
A diferencia de la distribución normal, la distribución de Poisson solo depende de un parámetro, *mu* (marcado en amarillo).

Mu informa del número esperado de eventos que ocurrirán en un intervalo de tiempo fijado. Cuando se habla de algo “esperado” tenemos que redirigirlo a pensar en la media. Por tanto, mu es la media de la frecuencia de los eventos.

Tanto la media como la varianza de esta distribución son *mu*, estrictamente positiva.

Representación.

Dada una distribución de Poisson con media 2, la distribución de probabilidad de densidad es la siguiente:



Función de densidad de probabilidad de Poisson.
La función solo está definida en valores enteros de x.

No todas las distribuciones de probabilidad de densidad de Poisson tendrán el mismo aspecto aunque mantengamos igual la muestra. Si cambiamos la media, es decir, el parámetro del que depende la función, también cambiará la función.

Función de densidad de probabilidad (fdp).

$$P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \qquad \forall\, x = \{0, 1, 2, \dots n\}$$

Función de densidad de probabilidad de Poisson

Esta función se entiende como la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor concreto x. Es la exponencial de la media negativa multiplicada por la media elevada a la observación y todo dividido por el factorial de la observación.

Como está indicado, para conocer la probabilidad de cada observación, tendremos que sustituir en la función todas las observaciones. En otras palabras, x es un vector de dimensión n que contiene todas las observaciones de la variable aleatoria X. La media también sería un vector pero de una dimensión, tal que:

$$x = \{0, 1, 2, \dots n\}$$

$$\mu = \{media\}$$

Parámetro y realizaciones de la variable aleatoria

Una vez ya tenemos las probabilidades calculadas, junto con las observaciones ya podemos dibujar la distribución de densidad de probabilidad.

Historia.

El nombre de esta distribución proviene de su creador, Siméon-Denis Poisson (1781-1840), un matemático y filósofo francés, que quería modelar la frecuencia de eventos durante un intervalo de tiempo fijado. También participó en perfeccionar la ley de los grandes números.

Aplicación.

La distribución de Poisson se utiliza en el campo de riesgo operacional con el objetivo de modelar las situaciones en que se produce una pérdida operacional. En riesgo de mercado se emplea el proceso de Poisson para los tiempos de espera entre transacciones financieras en bases de datos de alta frecuencia. También, en riesgo de crédito se tiene en cuenta para modelar el número de quiebras.

Ejemplo.

Suponemos que estamos en temporada de invierno y queremos ir a esquiar antes de diciembre. La probabilidad que abran las estaciones de esquí antes de diciembre es del 5%. De las 100 estaciones de esquí, queremos saber la probabilidad de que la estación de esquí más cercana abra antes de diciembre. La valoración de esta estación de esquí es de 6 puntos.

Los inputs necesarios para calcular la función de probabilidad de densidad de la Poisson son el conjunto de datos y mu:

Conjunto de datos = 100 estaciones de esquí.

Mu = 5% * 100 = 5 es el número de estaciones de esquí esperado dado el conjunto de datos.

$$P(X = 6) = \frac{5^6 e^{-5}}{6!} = 0,1462$$

Función de densidad de probabilidad de Poisson

Entonces, la estación más cercana tiene una probabilidad de 14,62% de que abra antes de diciembre.

Referencias

- Karipidis, K., y col. (2018) Mobile phone use and incidence of brain tumour histological types, grading or anatomical location: a population-based ecological study. BMJ Open 8: e024489. DOI: 10.1136/bmjopen-2018-024489.
- Subagia, R., Saleh, J.H., Churchwell, J.S., Zhang, K.S. (2020) Statistical learning for turboshaft helicopter accidents using logistic regression. Plos One 15: e022734. DOI: 10.1371/journal.pone.0227334.
- Triola M.F. (2009) Estadística 10ma ed. Pearson Educación. México.
- BDFutbol- Barcelona. Recuperado el 01-06-2020 de https://www.bdfutbol.com/en/e/e2.html?p=stats
- Fuente: https://concepto.de/que-es-un-conjunto/
- Stanley A. Smith; Randall I. Charles (2000). «1». Algebra (Constantino Hernández García, trad.) (1 edición). Pearson Educación. p. 3. ISBN 968-444-358-7.

- ↑ Nachbin, Leopoldo (1980). «3». Introducción al álgebra (José Mª Isidro Gómez, trad.) (1 edición). Editorial Reverte. p. 6. ISBN 97-884-2915-099-5.
- ↑ Harold J. Larson (1978). «1.2». Introducción a la teoría de probabilidades (Sergio Fernandez Everest, trad.) (8 edición). Editorial Limusa. p. 16. ISBN 97-896-8180-730-6.↑ Véase Barco Gómez, 2005, p. 21.
- https://www.conoce3000.com/html/espaniol/Libros/Matematica01/Cap12-03-AdicionNumerosEnterosGrandes.php

- https://economipedia.com/definiciones/diagrama-de-venn.html
- https://www.webyempresas.com/author/josefina/
- https://www.minitab.com/products/minitab/
- https://www.webyempresas.com/author/josefina/
- https://matemovil.com/distribucion-de-bernoulli/#intro
- https://www3.uji.es/~mateu/t4-alumnos.pdf
- http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/PDFs/Bernoulli.pdf
- https://conceptoabc.com/teorema-de-bayes/
- https://economipedia.com/definiciones/distribucion-de-poisson.html
- https://www.matematicasonline.es/BachilleratoCCNN/Segundo/ejercicios3/normal.pdf
- https://docs.google.com/document/d/1dzneviCfj0c8Y-Tuo5t-Ozx7NStBkXPsQ_u-E8705BQ/edit#
- https://www.profesor10demates.com/2013/09/probabilidad-7-teorema-de-bayes.html

Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California Sur.

México.