"Matemáticas financieras I"

COLEGIO DE BACHILLERES ESTADO DE B.C.S.

Prontuario de los bloques I, II, III, IV y V

Í N D I C E:

PRESENTACIÓN:

El presente compendio para la asignatura de Matemáticas Financieras I, se elaboró con la finalidad de proporcionar un apoyo bibliográfico para los alumnos que cursan el paquete económico administrativo.

Con la lectura, análisis y resolución de problemas de distintos libros de matemáticas financieras, se logró realizar una selección de información y ejemplos que se integraron en el presente compendio, mismos que están vinculados con las competencias y objetos de aprendizaje de los bloques de la asignatura de Matemáticas financieras I.

Es una material de fácil acceso, que les será de utilidad a los alumnos, para dar respuesta a la información que solicite el docente para la asignatura de matemáticas financieras I.

BLOQUE I:
IDENTIFICAS LA APLICACIÓN DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS.

Competencias a desarrollar:

- Elija las fuentes de información más relevantes de los Fundamentos Matemáticos y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y viabilidad.

- Describa los Fundamentos Matemáticos como prefacio a la aplicación a las diferentes situaciones reales e hipotéticas.

- Argumenta la solución obtenida de un problema de los Fundamentos Matemáticos, con métodos numéricos variacionales mediante lenguaje verbal y matemático y el uso de las tecnologías de información TIC.

- Estructura ideas de manera clara, coherente y sintética de la Ley de los Exponentes, fracciones propias e impropias y tanto por ciento en diferentes situaciones reales e hipotéticas.

- Formula y resuelve problemas matemáticos financieros aplicando leyes de los exponentes, fracciones propias e impropias y tanto por ciento en casos reales y concretos.

Objetos de aprendizaje:

Fundamentos Matemáticos

EXPONENTES Y RADICALES

El uso de la notación exponencial aplica para escribir en forma simplificada los productos de factores que se repiten, así cuando multiplicamos o dividimos en varias ocasiones un mismo factor es conveniente emplear exponentes para reducir la notación.

Por ejemplo:

$(-3)\ (-3)\ (-3)\ (-3) = 3^4$ y $(2x + 1)\ (2x + 1) = (2x + 1)^2$

Para el caso de considerar que u sea un número, el producto de u por si mismo cuatro veces se denota por u^4, esto es $(u)\ (u)\ (u)\ (u) = u^4$.

Para las matemáticas ninguna descripción del mundo estaría completa sin raíces y radicales; una aplicación sería para el caso de la obtención del interés por los tiempos de periodo que marca el pago de un préstamo u otros fenómenos tan diversos como la distancia a la que podemos ver el horizonte o la forma en que se percibe la temperatura en un día frio.

Para el caso en el que necesitemos descomponer un número en varios factores iguales a los que llámanos raíces, como el caso en el que si multiplicamos el número 4 por si mismo cinco veces da el resultado de 1024 decimos que 4 es la raíz quinta de 1024 y lo podemos escribir $4 = \sqrt[5]{1024}$, el pequeño número 5 a la izquierda del radical nos indica que si multiplicamos 4 por si mismo cinco veces obtenemos 1024, utilizando otro ejemplo de raíz es $6 = \sqrt[3]{216}$ porque $6^3=216$. Al desintegrar un número en solo dos factores iguales se obtiene su raíz cuadrada, como ejemplo $6 = \sqrt[2]{36} = \sqrt{36}$, regularmente cuando es raíz cuadrada no se especifica el índice del radical, se sobreentiende que es raíz cuadra del número que está dentro del radical.

El nombre que recibe el símbolo $\sqrt{\ }$ para denotar la raíz cuadrada se llama radical, el número debajo del radical es el radicando.

Radica $\longrightarrow \sqrt{c}$

Radicando

Cuando se tiene un producto de c^5 por c^3 equivale a multiplicar a c por si mismo ocho veces, así c^5 x c^3 = c^8 , si n y b son números enteros, entonces el producto de: c^n + c^b = c^{n+b}

De c^1 = 1 resulta razonable escribir $\sqrt{c}$= $c^{1/2}$, que lo obtenemos de $c^{1/2}$ x $c^{1/2}$ = $c^{1/2+1/2}$= c^1 = c, así también si se tiene $\sqrt[3]{c}$ = $c^{1/3}$, ahora se tiene $c^{1/3}$ x $c^{1/3}$ x $c^{1/3}$= $c^{1/3+1/3+1/3}$ = c^1 = c . Como vemos podemos emplear exponentes fraccionarios para obtener diferentes raíces de un número (entero) real c al conocer que $\sqrt[n]{c}$ = $c^{1/n}$ en donde el denominador del exponente es el índice del radical, para el caso en el que exponente es negativo se presenta lo siguiente:

$$c^{-1/2} \ \frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}} \ , a \neq 0$$

Algunos ejemplos son:

a) $36^{1/2} = \sqrt[2]{36} = 6$ b) $343^{1/3} = \sqrt[3]{343} = 7$ c) $-81^{1/4} = -(\sqrt[4]{81}) = -3$

d) $(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3$ e) $125^{-1/3} = \frac{1}{125^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = 5$

Si elevamos c^6 al cubo multiplicamos c^6 por si mismo tres veces. En total se multiplicará a c por si mismo 18 veces, de esta forma,

$$(c^6)^3 = c^6 \ x \ c^6 \ x \ c^6 = c^{6+6+6} = c^{6x3} = c^{18}$$

Si m y n son números enteros (reales) se tienen que:

$(c^m)^n = c^m \ x \ c^m \ x \ c^m \ \ldots \ c^m = c^{m+m+m+\ldots+m} = c^{mxn}$

Al generalizar esta propiedad para exponentes fraccionarios el resultado es:

$(c^{1/m})^n = c^{1/m} \ x \ c^{1/m} \ x \ c^{1/m} \ldots \ x \ c^{1/m} = c^{1/m+1/m+1/m+\ldots+1/m} = c^{n/m}$

Así también:

$(c^n)^{1/m} = c^{n/m}$

Cada exponente racional tiene un numerador igual a 1. Si el numerador es algún otro entero, también se multiplican los exponentes al elevar una potencia a otra. Por esa razón,

$C^{2/3} = (c^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{c})^2$ y $C^{2/3} = (c^2)^{1/3} = (\sqrt[3]{c^2})$

Entonces: $C^{2/3} = (\sqrt[3]{c})^2 = (\sqrt[3]{c^2})$

Puedes observar que el denominador 3 del exponente racional o entero es el mismo que el índice del radical y el numerador 2, del exponente racional sirve como exponente en cada una de las dos formas radicales. Esto se demuestra con la siguiente definición:

La definición de $c^{n/m}$ si $\sqrt[n]{c}$ representa un número real y $\frac{m}{n}$ es un número racional positivo, n≥2,

Entonces $c^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{c}\right)^n$

También $c^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{c^n}\right)$

Y, si $c^{n/m}$ es un número real distinto a cero, entonces

$$c^{-n/m} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$$

$c^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{c}\right)^n$, el denominador es el índice del radical y el numerador es el exponente.

Ejemplos:

A) $125^{2/3} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = (5)^2 = 25$ B) $49^{3/2} = \left(\sqrt[2]{49}\right)^3 = (7)^3 = 343$

C) $256^{-2/4} = \frac{1}{256^{2/4}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{256}\right)^2} = = \frac{1}{(4)^2} = \frac{1}{16}$

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES.

En la leyes de los exponentes están resumidas las propiedades más significativas de las potencias de *u* y *v* donde sean estos números reales , variables o expresiones algebraicas y sean *m* y *n* números enteros. En donde se supone que todas las bases son distintas de cero.

Leyes de los exponentes

Propiedad	Ejemplo
1) $u^m\, u^n = u^{m+n}$	$(9)^3 + (9)^2 = 9^{3+2} = 9^5$
2) $\frac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$	$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^2$, $\frac{y^9}{y^4} = y^{9-4} = y^5$
3) $u^0 = 1$	$7^0 = 1$
4) $u^{-1} = \frac{1}{u^n}$	$7^{-6} = \frac{1}{7^6} = \frac{1}{117649}$, $z^{-5} = \frac{1}{z^5}$
5) $(uv)^m = u^m\, v^m$	$(3y)^4 = 3^4 y^4 = 81y^4$, $(3)^3\,(2)^3 = 27 \times 8 = 216$
6) $(u^m)^n = u^{mn}$	$(x^4)^3 = x^{(4)(3)} = x^{12}$
7) $\left(\frac{u}{v}\right)^m = \left(\frac{u^m}{v^m}\right)$	$\left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8^2}{3^2} = \frac{64}{9}$, $\left(\frac{z}{a}\right)^4 = \frac{z^4}{a^4}$
8) $u^1 = u$	
9) $\frac{1}{u^m} = u^{-m}$	
10) $\left(\frac{u}{v}\right)^{-y} = \frac{v^y}{u^y}$	

Estas propiedades también son válidas para exponentes fraccionarios o negativos, aquí unos ejemplos:

$$(64 \times 8)^{2/3} = 64^{2/3} \times 8^{2/3} = (64^{1/3})^2 \times (8^{1/3})^2 = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 \times \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4^2 \times 2^2 = 16 \times 4 = 64$$

$$\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{49^{1/2}}{16^{1/2}} = \frac{\sqrt[2]{49}}{\sqrt[2]{16}} = \frac{7}{4}$$

Esta regla es útil en lo que es al uso de los exponentes negativos en un cociente, recordemos que es válido realizar:

$\frac{1}{\frac{u}{v}} = \frac{v}{u}$, entonces $\left(\frac{u}{v}\right)^{-y} = \frac{1}{\left(\frac{u}{v}\right)^y} = \frac{1}{\frac{u^y}{v^y}} = \frac{v^y}{u^y}$ Ejemplo: $\left(\frac{36}{25}\right)^{-1/2} = \frac{25^{1/2}}{36^{1/2}} = \frac{\sqrt[2]{25}}{\sqrt[2]{36}} = \frac{5}{6}$

Es importante asegurarse en comprender la propiedad de los exponentes que permite mover factores de numerador a denominador y viceversa, ejemplo: $\frac{u^{-m}}{v^{-n}} = \frac{v^n}{u^m}$.

También es importante aclarar que no es verdadero que las potencias de una suma o resta sean la suma o resta de la potencia, esto es, $(u+v)^m \neq u^m + v^m \quad y \quad (u-v)^m \neq u^m - v^m$

A través de los siguientes ejemplos se trata de identificar la ley de los exponentes que justifica cada una de las igualdades, recordando también que las propiedades antes vistas nos ayudan a simplificar expresiones donde están presentes los exponentes.

A) $16^{-3/4} = \quad \frac{1}{(16)^{3/4}} = \frac{1}{(16^3)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{(4096)^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4096}} = \frac{1}{8}$ o

$\frac{1}{(16)^{3/4}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{(2)^3} = \frac{1}{8}$

B) $\sqrt[3]{90}\ \sqrt[6]{90} = 90^{\frac{1}{3}}\ 81^{\frac{1}{6}} = (90)^{1/3}\,(81^{1/2})^{1/3} = (90)^{1/3}\,(9)^{1/3} = (90 \text{ x } 9)^{1/31} = \sqrt[3]{810} = 9.32$

C) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[2]{64}} = \frac{16^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{2}}} = \frac{(4^2)^{\frac{1}{3}}}{(4^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{3}{2}}} = (4)^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{4^{\frac{5}{6}}}$

TANTO POR CIENTO

Concepto de tanto por ciento.

El tanto por ciento es una proporcionalidad que se establece con relación a cada 100 unidades. El término por ciento, representado por el símbolo %, significa centésimos; por ejemplo 25% es solamente otra forma de representar 25/100, 0.25 o ¼.

Ejemplo de la aplicación de porciento (porcentaje).

1) Si decimos que *Y* carga el 20% por el cobro de cierta deudas
   Significa que *Y* carga $20.00 por cada $100.00 que se cobra
2) Si decimos: Una inversión produce el 7% anual
   Significa: La inversión produce $7.00 anuales por cada $100.00 invertidos.

Cualquier número expresado en forma decimal, puede ser escrito como por ciento colocando simplemente el punto decimal dos lugares a la derecha y agregando el símbolo %.

Por ejemplo:

½ = 0.50 = 50%; $\frac{1}{6}$ = 0.166 = 16.6%; $11/4$ = 2.75 = 276%

$7/6$ = 1.166 = 116.6% ; 9 = 9.00 = 900%

De manera inversa para expresar numéricamente un por ciento dado, se suprime el símbolo de % y colocamos el punto decimal dos lugares a la izquierda. Por ejemplo:

25% = 0.25 = ¼ ; 7%= .07%; 8¾%= 0.0875; 225% = 2.25; 2000%= 20

Ejercicios resueltos:

1) Encontrar el por ciento para cada una de los ejercicios presentados:

a) 4% de 925 $\frac{4}{100}$ = 0.04 925 (0.04) = 37

b) 187% de 450 450 (1.87) = 841.5

c) 3½% de $45,865.79 45,865.79 (0.035) = 1,605.30

d) ¾% de $18,000.00 18,000 (0.0075) = $135.00

2) De los siguientes ejercicios obtener qué por ciento de:

a) 60 es 30 $\frac{30}{60}$ = ½ = 50%

b) 35 es 1400 $\frac{1400}{35}$ = 40 = 400%

c) $1600 es $25 $\frac{25}{1600}$ = 0.015625 = 1.5625%

d) $2500 es $137.50 $\frac{137.50}{2500}$ = = 0.055 = 5½

3) Hallar *x* si el 9% de *x* es 8.90 se tiene que 0.09*x* = 8.90 por tanto *x* = $\frac{8.90}{0.09}$ = 98.88

4) a) ¿De qué número es 35 el 25%? $\frac{35}{0.25}$ = 140

b) ¿De qué cantidad es $67.00 el 5¾%? $\frac{67}{0.0575}$ = $1,165.21

c) ¿De qué cantidad es $376.85 el 125% $\frac{376.85}{1.25}$ = $301.48

5) Sobre una inversión de $4500.00, *Y* obtiene una utilidad de $338.25. ¿Qué porcentaje de la inversión representa dicha utilidad?

El planteamiento para el problema es ¿Qué porcentaje de $4500.00 es $338.25?

$\frac{338.25}{4500}$ = 0.07516 = 7½%

6) Un despacho de cobranza recupera el 92% de una demanda de $37,500.00 y cobra por concepto de servicios el 18% de la suma recuperada. ¿Qué cantidad recibirá el cliente?

El despacho de cobranza recupera 37,500 (0.92) = $34,500.00

Los honorarios por cobranza son 34,500 (0.18) = $6,210.00

El cliente recibe 34,500 – 6,210 = $28290.00

BLOQUE II:
INTERPRETA RAZONES Y PROPORCIONES

Competencias a desarrollar:

- Elije procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye en la solución de razones y proporciones.
- Usa la tecnología de información y comunicación, para obtener información sobre la aplicación de las Razones Aritméticas y Geométricas así como la Proporción directa, inversa, compuesta y mixta a situaciones cotidianas.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de Razones y Proporciones para determinar o estimar su comportamiento en diferentes situaciones reales o hipotéticas.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos de Razones y Proporciones a través de procedimientos matemáticos y los contrasta con situaciones reales.
- Aplica a situaciones reales los métodos establecidos, de las Razones Aritméticas y Geométricas, Proporciones directa, inversa, compuesta y mixta.
- Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques

Objetos de aprendizaje:

Razones

Proporciones

RAZONES

Una razón es la comparación de dos cantidades expresadas en la misma unidad por medio de la resta o la división.
Se le llama razón aritmética al resultado de la comparación de cantidades representadas en la misma unidad, por medio de la sustracción.

Por ejemplo al comparar las cantidades 28 y 7 a través de la sustracción, se obtiene 28 – 7 = 21 Razón aritmética

La razón geométrica es el resultado de comparar dos cantidades expresadas en la misma unidad, por medio de la división.
Así al comparar las cantidades 28 y 7 por medio de la división se obtiene $\frac{28}{7}$ = 4 razón geométrica.

Las dos formas de escribir las razones geométricas son:
a) Separando las dos cantidades separando con dos puntos (:) ; 28:7 y se lee 28 es a 7
b) En forma de fracción $\frac{28}{7}$

Las razones aritméticas pueden escribirse de dos maneras:
a) Separando las dos cantidades con el signo menos (-)
b) Separando ambas cantidades con un punto (.)

Ejemplo:
La razón aritmética de 40 es a 20 se puede escribir 40 – 20 0 bien 4.20

Elementos de una razón:
Las razones aritméticas o geométricas tienen dos términos, el primer término recibe el nombre de antecedente y el segundo termino de consecuente.

Podemos representar al antecedente por A y al consecuente por C.

El resultado de la comparación del antecedente y consecuente se llama razón y lo representamos por R.

En consecuencia las razones se expresan:

a) Aritmética A – C = R o también A . C = R

b) Geométrica: $\frac{A}{C} = R$ o también A : C = R

Ejemplos de razones aritméticas y geométricas.

Un libro de historia costo $95.00 el año pasado. Este año la docena de libros cuesta $1152.00 ¿Cuál es el precio antiguo y actual del libro?

Solución.

Este año la docena de libros cuesta $1152.00 entonces cada libro cuesta $\frac{1152}{12} = \$96.00$ hace un año el mismo libro costaba $84.00.

Hallamos la razón geométrica del precio actual y antiguo es:$\frac{precio\ actual}{precio\ antiguo} = \frac{84}{96} = \frac{42}{48} = \frac{7}{8}$

En un bar la razón de mujeres que toman una margarita o piñada es de $\frac{3}{4}$ si en el bar hay 34 mujeres.

¿Cuántas de ellas toman margaritas?

Si cada margarita cuesta $45.00 ¿Cuántas fueron los ingresos del día por la venta de margarita a los clientes?

Solución.

3:4 $\quad \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ a + b = 35

Si multiplicamos por *x* el antecedente y el consecuente:

$\frac{a}{b} = \frac{3x}{4x}$ $\qquad$ 3x + 4x = 35

7x = 35

$X = \frac{35}{7}$

X= 5

a = 3 (5) = 15 b= 4 (5) = 20

La respuesta es que toman 15 margaritas y los ingresos por la venta de margaritas fueron $675.00

Conociendo la razón de los sueldos de dos recepcionistas es $\frac{7}{3}$ y su diferencia es 244. Calcular el sueldo de las recepcionistas.

Solución.

7:3 $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ a – b = 244

Si multiplicamos por *x* el antecedente y el consecuente:

$\frac{a}{b} = \frac{7x}{3x}$ 7x – 3x = 244

4x = 244

$X = \frac{244}{4}$

X = 61

a = 7 (61) = 427 b= 3 (61) = 183

Comentaremos que la tasa es una razón en donde aparecen dos unidades diferentes. En general la tasa está en términos de una cantidad por unidad; por ejemplo, kilómetros por hora (km/h). Esta razón se utiliza en demografía, economía y otras disciplinas.

Para las matemáticas financieras la tasa que tiene especial importancia es la del interés, que se expresa como un porcentaje que se aplica al capital que esta invertido en una unidad de tiempo. La tasa de interés es considerada como “el precio del dinero en el mercado financiero”.

El interés es un cargo por el uso del dinero, cuando se solicita un préstamo de dinero, se paga interés por usarlo. Cuando depositamos dinero en una cuenta de ahorros, el banco nos paga interés por usar nuestro dinero. Este tema del interés será abordado en el bloque 5.

PROPORCIONES

Es aquella expresión matemática constituida por dos razones con el mismo resultado.

Una razón es la igualdad de dos razones

Si $\frac{a}{b} = q \ \ y \ \ \frac{c}{d} = q \ \ entonces \ \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

La lectura de los términos es así: *a* es a *b* como *c* es a *d*, puede escribirse también a ÷ *b* = *c* ÷ *d*

En una proporción se le llama extremos al antecedente de la primera razón y al consecuente de la segunda razón y medios al consecuente de la primera razón y al antecedente de la segunda razón.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Exremos: a y d Medios: c y b

Una proporción se determina con la igualdad de dos razones. De la siguiente proporción $\frac{35}{5} = 7 \ \ y \ \ \frac{56}{8} = 7$ el cociente obtenido de las razones que componen una proporción se conoce como factor de proporcionalidad (*k).*

Cuando en una proporción se desconoce el valor de uno de los cuatro números que la conforman, se puede utilizar el teorema para encontrar ese valor faltante.

Teorema: En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Ejemplo:

En la proporción $\frac{35}{5} = \frac{56}{8}$, 35 y 8 son los extremos y 5 y 56 son los medios; si la proporción es verdadera , se debe de cumplir que (35) (8) y (56) (5), lo cual es verdadera, porque 280 = 280

Ejemplos:

Para comprar un billete de lotería tres amigos cooperaron de la manera siguiente: Luis, puso $15.00, Pedro $5.00 y Juan $25.00. Una vez realizado el sorteo, los tres amigos ganaron un premio equivalente a $153,000.00. Con base en la cooperación que cada quien aportó para comprar el billete ¿cómo deben repartir el premio?

Luis aportó $15.00

$$\frac{15}{45} = \frac{x}{153{,}000}$$

$$x = \frac{153{,}000 \times 15}{45}$$

$$x = 51{,}000$$

Pedro aportó $5.00

$$\frac{5}{45} = \frac{x}{153{,}000}$$

$$x = \frac{153{,}000 \times 5}{45}$$

$$x = 17{,}000$$

Juan aportó $25.00

$$\frac{25}{45} = \frac{x}{153{,}000}$$

$$\frac{25}{45} = \frac{x}{153{,}000}$$

$$x = 85{,}000$$

El premio se repartirá de la siguiente manera: Luis tendrá $51,000.00, Pedro, $17,000.00 y Juan $85,000.00

Ejemplo:

Si invertir $94,500 producen al año $11,900.00 de interés y nosotros deseamos un interés de $35,000.00. ¿Cuánto debemos de invertir?

$$\frac{94{,}500}{11{,}900} = \frac{x}{35{,}000}$$

$$x = \frac{94{,}500 \times 35{,}000}{11{,}900}$$

$$x = 290{,}131.57$$

BLOQUE III:
APLICAS EL REPARTO PROPORCIONAL

Competencias a desarrollar:

- Identifica los diferentes modelos matemáticos de Reparto Proporcional para dar solución a problemas planteados en situaciones reales o hipotéticas.
- Diseña casos prácticos para ser resueltos mediante Reparto Proporcional, de acuerdo al contexto del alumnado.
- Formula y resuelve problemas matemáticos reales o hipotéticos, aplicando los diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos que los contraste con modelos establecidos en situaciones reales, mercantiles y financieros.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos del reparto de utilidades de los trabajadores mediante el Reparto Proporcional en situaciones reales de una entidad económica.
- Argumenta la solución obtenida de los problemas, mediante el lenguaje algebraico y uso de la TIC.

Objetos de aprendizaje:

Reparto Proporcional.

El reparto proporcional consiste en la distribución de una cantidad en partes proporcionales. Se puede decir que el reparto proporcional implica repartir una magnitud (km, tiempo, moneda) total de manera proporcional entre diversas magnitudes de una misma clase.

Es importante conocer que existen dos tipos fundamentales de repartos proporcionales, como queda claro en el ámbito de las matemáticas, se tiene el reparto proporcional directo, mismo que se basa en el hecho de que a mayor cantidad corresponde por tanto, mayor proporción.

Se puede realizar también el reparto proporcional inverso, que parte de la máxima que a más cantidad menor proporción. También esta lo que se conoce como reparto proporcional compuesto que es aquel que tiene lugar cuando las partes que se van a repartir son proporcionales al producto de varios números. A su vez, ese puede ser directo, inverso o mixto.

REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO.

El reparto es directo, cuando mayor sea el número proporcional, más le corresponde al beneficiario o viceversa.

Iniciamos al repartir el número "*N*" entre las partes proporcionales "*a*" , "*b*" y "*c*"

Donde "*a*" , "*b*" y "*c*" se le conoce como números proporcionales.

Sea "x", "y" "z", la cantidad buscada, que le corresponde a cada número proporcional.

Existen dos métodos de cálculo que son los siguientes: Método de proporciones y el método de reducción de la unidad. (solo abordaremos el método de proporciones).

El método de proporciones consiste en formular proporciones de acuerdo con el siguiente procedimiento, para obtener la fórmula para dividir un número en partes proporcionales a otros varios.

Sea el número *N* que queremos dividir en partes proporcionales a "*a*", "*b*" y "*c*". Llamamos *x* a la parte de *N* que le corresponde a "*a*", *y* a la que le corresponde a "*b*" y *z* a la que le corresponde a "*c*". Como la suma de estas partes es igual al número dado, tendremos que $N = x + y + z.$

Es evidente que si $a > b > c.$ y $x > y > z.$ Luego podemos formar con estas cantidades una serie de razones iguales.

Y como hay un teorema que dice que una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente, tendremos:

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} \; o \; sea \; \frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a} \; \therefore x = \frac{Na}{a+b+c}$$

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{y}{b} \; o \; sea \; \frac{N}{a+b+c} = \; b \; \therefore x = \frac{Nb}{a+b+c}$$

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{z}{c} \; o \; sea \; \frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a} \; \therefore x = \frac{Nc}{a+b+c}$$

De lo anterior se deduce la siguiente regla.

Para repartir un número en partes proporcionales a otros varios se multiplica el número que se quiere repartir por cada uno de los otros números y se divide por la suma de éstos.

Ejemplos:

1) Repartir 580 en partes directamente proporcionales a 7, 10 y 12.

a= 7 b= 10 c= 12   N = 580

a + b + c = 29

$$x = \frac{(580)(7)}{7+10+12} = 140$$

$$y = \frac{(580)(10)}{29} = 200$$

$$z = \frac{(580)(12)}{29} = 240$$

2) Tres hermanos adquieren una propiedad en $85,000 y algún tiempo después la venden por $100,000. Si las partes que impusieron son proporcionales a los números 3,4 y 8, ¿cuánto ganó cada uno?

a= 3 b= 4 c= 8   N = 85,000 – 100,000 = 15,000

3 + 4 + 8 = 15

$$x = \frac{(15000)(3)}{3+4+8} = \quad 3000$$

$$y = \frac{(15000)(4)}{3+4+8} = \quad 4000$$

$$z = \frac{(15000)(8)}{3+4+8} = \quad 8000$$

Cada uno ganó $3000.00, $4000.00 y $5000.00

3) Un padre dispone al morir que su fortuna que está constituida por una casa valuada en $48000.00 y dos automóviles valuados en $1500.00 cada uno se reparta entre sus tres hijos de modo que el mayor tenga 8 partes de la herencia, el mediano 6 y el menor 3.

¿Cuánto corresponde a cada uno?

a= 8 b= 6   c= 3   x=48000 y= 1500 z= 1500 , N = 51000

a + b + c = 17

$$x = \frac{(51000)(8)}{8+6+3} = \frac{62400}{17}$$

$$x = 24000$$

$$y = \frac{(51000)(6)}{8+6+3} = \frac{306,000}{17}$$
$$y = 18000$$

$$z = \frac{(51000)(3)}{8+6+3} = \frac{153000}{17}$$
$$z = 9000$$

Respuesta: El mayor obtendrá \$24,000.00, el mediano \$18,000.00 y el menor \$9,000.00

Par repartir un número en partes directamente proporcionales a varios quebrados.
La regla nos dice que se reducen los quebrados a un común denominador. Se prescinde del denominador y se divide el número dado en partes proporcionales a los numeradores.
Ejemplo:
Dividir 46 en partes directamente proporcionales a $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$
Solución:
Reducir estos quebrados al mínimo común denominador, tendremos:
$$\frac{15}{20}, \frac{8}{20}$$
Siguiente paso: prescindimos del denominador común 4 y repartimos el número 46 en partes proporcionales a los numeradores 15 y 8:

$$x = \frac{(46)(15)}{15+8} = \frac{690}{23}$$
$$x = 30$$

$$y = \frac{(46)(8)}{15+8} = \frac{368}{23}$$
$$y = 16$$

REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

El reparto proporcional es inverso, cuando a medida que es mayor el número proporcional menor le corresponda en el reparto, y viceversa.

Iniciamos al repartir el número "*N*" entre las partes proporcionales "*a*" , "*b*" y "*c*"
Donde "*a*" , "*b*" y "*c*" se le conoce como números proporcionales.
Sea "x", "y" "z", la cantidad buscada, que le corresponde a cada número proporcional.

Se inicia al convertir el reparto proporcional simple inverso, en reparto proporcional simple directo, de la siguiente manera:

- Se invierte cada uno de los números proporcionales. Esta operación se consigue dividiendo uno entre el número proporcional.
- Al tener invertidos todos los números proporcionales; el siguiente paso es obtener un común denominador a los inversos de los números proporcionales.
- Se le da solución de igual manera que a un reparto proporcional simple directo.

Como regla general
Se invierten los números dados y se reparte el número que se quiere dividir en parte directamente proporcional.
Ejemplo:
Repartir 141 en partes inversamente proporcional 7,21,84,10 y 30
Solución:
Se invierten los enteros:

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{21}, \frac{1}{84}, \frac{1}{10}, \frac{1}{30}$$

Ahora repartimos en partes directamente proporcionales a estos quebrados, para lo cual los reduciremos al mínimo común denominador.

$\frac{60}{420}, \frac{20}{420}, \frac{5}{420}, \frac{42}{420}, \frac{14}{420}$

Se prescinde del denominador común 420, y repartimos 141 en partes proporcionales a los números 60, 20, 5, 42,14. v + w + x + y + z = 141

$$v = \frac{(141)(60)}{141} = 60$$

$$w = \frac{(141)(20)}{141} = 20$$

$$x = \frac{(141)(5)}{141} = 5$$

$$y = \frac{(141)(42)}{141} = 42$$

$$z = \frac{(141)(14)}{141} = 14$$

Repartir un número en partes inversamente proporcional a otros varios quebrados.

Ejemplo.

Dividir 3368 en partes inversamente proporcional a $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}\ y\ \frac{1}{8}$

Solución:

Invertimos los quebrados

$\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{7}{2}\ y\ \frac{8}{1}$

Reducimos a un mínimo común denominado

$\frac{40}{30}, \frac{36}{30}, \frac{105}{30}\ y\ \frac{240}{30}$

Prescindimos del numerador 30, y repartimos 3368 en partes directamente proporcionales a los numeradores 40, 36, 105, 240

$$w = \frac{(3368)(40)}{421} = 320$$

$$x = \frac{(3368)(36)}{421} = 208$$

$$w = \frac{(3368)(105)}{421} = 840$$

$$w = \frac{(3368)(240)}{421} = 1920$$

Se reparten 238 vales para útiles escolares entre cuatro niños en partes inversamente proporcional a sus edades que son 2,5,6 y 8 respectivamente. ¿Cuántos paquetes de útiles escolares recibirá cada uno?

Solución:

Se invierten los enteros y quedan así:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\ y\ \frac{1}{8}$$

Reduciéndolo a un común denominador:

$$\frac{60}{120}, \frac{48}{120}, \frac{40}{120}\ y\ \frac{30}{120}$$

Prescindimos del numerador 120, y repartimos los 238 vales en partes directamente proporcionales a los numeradores 60, 24, 20, 15.

$$w = \frac{(238)(60)}{119} = 120$$

$$x = \frac{(238)(24)}{119} = 48$$

$$y = \frac{(238)(20)}{119} = 40$$

$$z = \frac{(238)(15)}{119} = 30$$

La forma de repartir inversamente proporcional los boletos para útiles escolares es: Niño de 2 años, 120 vales, niño de 5 años, 48 vales, niño de 6 años, 40 vales, y al niño de 8 años, le corresponden 30 vales.

REPARTO COMPUESTO

El reparto compuesto es aquel en que hay que repartir una cantidad en partes proporcionales a los productos de varios números.

Ejemplo:

Repartir 411 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 4,5 y 6 a 8,9 y10.

Solución:

Multiplicamos (4) (8) = 32, (5) (9)= 45, (6) (10) = 60 , a=32, b=45, c=60

a + b+ c = 137

$$x = \frac{(411)(32)}{137} = 96$$

$$y = \frac{(411)(45)}{137} = 135$$

$$z = \frac{(411)(60)}{137} = 180$$

Repartir 32 en dos partes que sean a las vez directamente proporcional a 2 y 4 e inversamente proporcional a 5 y 6.

Solución.

Se multiplican los números con relación a los cuales el reparto es directo por los inversos de los números con relación a los cuales el reparto es inverso. Así en este caso, multiplicaremos 2 por el inverso de 5, o sea por $\frac{1}{5}$ y 4 por el inverso de 6, o sea por $\frac{1}{6}$ y obtenemos:

$2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

El siguiente paso es repartir 32 en partes proporcionales a estos productos $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{6}$, para los cual los reducimos a un común denominador $\frac{6}{15}$ $\frac{10}{15}$

Repartimos 32 en partes proporcionales a los numeradores:

$$y = \frac{(32)(6)}{16} = 12$$

$$z = \frac{(32)(10)}{16} = 20$$

Se reparten €26 entre dos niños de 3 y 4 años respectivamente en partes proporcionales a sus edades e inversamente proporcionales a sus faltas. El de 3 años tiene 6 faltas y el de 4 años tiene 5 faltas.

¿Cuánto debe recibir cada niño?

Solución.

$3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ $\qquad$ $4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Repartimos los €26 en partes proporcionales a los productos $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{5}$, y los reducimos a un mínimo común denominador $\frac{5}{10}$ $\frac{8}{10}$

Repartimos €26 en partes proporcionales a los numeradores

$$y = \frac{(26)(5)}{13} = 10 \qquad y = \frac{(26)(8)}{13} = 16$$

El niño de 3 años recibirá €10 y el niño de 4 años recibirá €16.

BLOQUE IV:
CALCULAS LAS PROGRESIONES

Competencias a desarrollar:

- Identifica y utiliza como herramientas el procedimiento de las Progresiones Aritméticas y Geométricas para la solución de problemas de interés de simple y compuesto.

- Argumenta la solución obtenida de ejercicios de Progresiones mediante la aplicación de modelos matemáticos y usa la tecnología de información y comunicación.

- Explica e interpreta los resultados obtenidos de las Progresiones mediante procedimientos matemáticos de saldos insolutos en situaciones reales.

- Formula y resuelve problemas prácticos en situaciones reales de empresas financieras y mercantiles mediante procedimientos matemáticas.

- Aplica las sucesiones de números en casos prácticos, siguiendo los procedimientos de manera reflexiva, identificando que cada uno de sus pasos contribuye a la solución de los ejercicios.

Objetos de aprendizaje:

Progresiones.

Las sucesiones son conocidas también como progresiones, tienen múltiples aplicaciones en diversas áreas como la ingeniería, la economía, la estadística y otras; sin embargo, sin embargo las que más se utilizan en las matemáticas financieras y en finanzas son las aritméticas y las geométricas. Las primeras se caracterizan porque la diferencia entre dos términos sucesivos cualesquiera es siempre la misma; mientras que en las segundas, el cociente entre dos términos sucesivos es constante, es siempre el mismo.

Una sucesión o progresión se define como un conjunto ordenado de números reales formados de acuerdo con una regla. Cada número de la progresión recibe el nombre de término. El conjunto 3,8,13,18,22 es una progresión cuya regla es que cada término anterior.

Se dice que las progresiones en general se representan como:

$$a_{1,}a_{2\ldots\ldots}a_n$$

PROGRESIÓN ARITMÉTICA O SUCESIÓN ARITMÉTICA

Definición.

Una progresión es aritmética si cada término es igual al anterior más una constante "d" llamada diferencia común.

Sea $a_{1,}a_{2\ldots\ldots,}a_n$ una progresión aritmética y sea d su diferencia común. Por definición, es posible escribir

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d= a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d= a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d= a_1 + 4d$

....

……

……

$a_n = a_1 + (n – 1) d$

El *n*-énesimo témino se obtuvo al observar que el coeficiente numérico de *d* en cada término es uno menos que el correspondiente número de orden del término. Así el *n*-énesimo término de una progresión aritmética se obtiene a través de la siguiente ecuación.

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

La suma de los términos de una progresión aritmética recibe el nombre de serie aritmética. Es importante deducir la fórmula para encontrar la suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética.

Sea $a_{1,}a_{2\ldots\ldots}a_{n,}$ …. una sucesión aritmética cuya diferencia común es *d,* y sea

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Como:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_1 + 4d$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots$$

Entonces:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

Escribiendo los términos del segundo miembro de la primera ecuación en orden inverso se obtine:

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_n + d) + a_1$$

Sumando las dos ecuaciones, se obtiene:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \ldots (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Tenemos el siguiente resultado:

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

En donde n es el número total de binomios en la suma. Al despejar S_n se obtiene la fórmula general para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

Ejemplos.

El sexto término de una progresión aritmética es -8 y su diferencia común es -8. Encuentra el primer término de la sucesión y la suma de los seis primeros términos.

Solución.

De la fórmula

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

Despejamos:

$$a_1$$

$$- a_1 = - a_n + (n – 1) d$$

$$(-1) - a_1 = (-1) - a_n + (n – 1) d$$

$$a_1 = a_n - (n – 1) d$$

Sustituimos:

$$a_n = a_6 = -8,\ n = 6\ \ d= -8$$

$$a_1 = -8 – (6 – 1) (– 8)$$

$$a_1 = -8 - (5) (-8)$$

$$a_1= -8 + 40$$

$$a_1= 32$$

El primer término es $a_1= 32$

Para encontrar la suma de los seis primeros términos, utilizamos la siguiente fórmula

$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$

Sustituimos

n= 6, a_1= 32, a_6= -8

$S_6 = \frac{6}{2}\,(32 + (-8))$

$S_6 = \frac{6}{2}\,(24)$

$S_6 = 3\,(24)$

$S_6 = 72$

La suma de los seis términos es igual a 72

El primer término de una progresión aritmética es 20 y el último término es 74. Si la suma de los términos es 470, calcular:

a) El número de los términos de la progresión.

b) La diferencia común.

c) Escriba la progresión completa.

El número de los términos de la progresión aritmética se obtiene realizando las siguientes operaciones:

Utilizamos la fórmula

$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$

Despejamos *n*

$\frac{S_n}{(a_1 + a_n)} = \frac{n}{2}$

$2\left(\frac{S_n}{a_1 + a_n}\right) = n$

Sustituimos:

$S_n = 470$, $a_1 = 20$, $a_n = 74$, $n =¿?$

$$n = 2\left(\frac{S_n}{a_1 + a_n}\right)$$

$$n = 2\left(\frac{470}{20 + 74}\right)$$

$$n = 2\left(\frac{470}{94}\right)$$

$$n = 2\ (5)$$

$$n = 10$$

El número de los términos de la sucesión es 10.

b) Encontrar la diferencia común.

Para obtener la diferencia común es necesario despejar *d* de la siguiente fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)\ d$$

$$a_n - a_1 = (n-1)\ d$$

$$\frac{a_n - a_1}{(n-1)} = d$$

$$d = \frac{74 - 20}{(10-1)}$$

$$d = \frac{54}{(9)}$$

$$d = 6$$

La diferencia de la progresión aritmética: *d*= 6

c) Los diez términos de la progresión aritmética son:

$$a_n = a_1 + (n-1)\ d$$

$$a_1 = 20 + (1-1)\ 6$$

$$a_1 = 20$$

$$a_2 = 20 + (2-1)\ 6$$

$$a_2 = 26$$

$$a_3 = 20 + (3 - 1)\,6$$

$$a_3 = 32$$

$$a_4 = 20 + (4 - 1)\,6$$

$$a_4 = 38$$

$$a_5 = 20 + (5 - 1)\,6$$

$$a_5 = 44$$

$$a_6 = 20 + (6 - 1)\,6$$

$$a_6 = 50$$

$$a_7 = 20 + (7 - 1)\,6$$

$$a_7 = 56$$

$$a_8 = 20 + (8 - 1)\,6$$

$$a_8 = 62$$

$$a_9 = 20 + (9 - 1)\,6$$

$$a_9 = 68$$

$$a_9 = 20 + (10 - 1)\,6$$

$$a_9 = 74$$

Los 10 términos de la progresión aritmética son: 20,26,32,38,44,50,56,62,68,74.

Un estudiante ahorra para dar el enganche de una motocicleta. La primer semana ahorra $80.00; la segunda semana $100.00; la tercer semana $120.00, y así sucesivamente, durante 52 semanas. ¿Cuánto dinero tendrá al final de las 52 semanas?

Solución:

Obtenemos la diferencia común $d = 100 - 80 = 20$, $a_1 = 100$, $n = 52$

Sustituimos los valores en la fórmula

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$$

$$a_{52} = 100 + (52 - 1)\,20$$

$$a_{52} = 1100$$

Para obtener la suma al final de las 52 semanas, utilizamos la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

Sustituimos los valores:

$n = 52$, $a_1 = 80$, $a_n = a_{50} = 1100$

$$S_{52} = \frac{52}{2}\,(80 + 1100)$$

$$S_{52} = 26\,(1180)$$

$$S_{52} = 32{,}680$$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una progresión geométrica es una progresión en la cual cada término, después del primero, se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad constante llamada razón común. Por ejemplo, la sucesión 1,3,9,27,81,243,… es una progresión geométrica cuya razón común es 3, debido a que 1 x 3 = 3, 3 x 3 = 9, 9 x 3 = 27, 27 x 3 = 81 y 81 x 3 = 243.

En toda progresión geométrica la razón común es igual a la división de un término cualquiera entre el término anterior.

Sea $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ una progresión geométrica , con $a_1 \neq 0$ y sea *r* su razón común, donde $r \neq 0$. Por definición,

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1\,r$$

$$a_3 = a_2\,r = (a_1\,r)\,r = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3\,r = (a_1 r^2)\,r = a_1 r^2$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

El *n*-ésimo término se obtuvo al observar que el exponente de *r* en cada término es uno menos que el correspondiente número de orden del término. Por tanto, el *n*-ésimo término de una sucesión geométrica está dado por la siguiente ecuación.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

La suma de los términos de una progresión geométrica se llama serie geométrica. A continuación, se procederá a deducir una fórmula para obtener la suma de los *n* primeros términos de una sucesión geométrica.

Sea $a_{1,} a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una progresión geométrica, cuya razón común es *r, y* sea

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_n$

Como:

$a_1 = a_1$

$$a_2 = a_1 r$$
$$a_3 = a_1 r^2$$
$$a_4 = a_1 r^3$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots$$

Entonces:

$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$

Multiplicando por *r* ambos lados de la igualdad anterior,

$S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$

Restando la primera ecuación de la segunda, se obtiene:

$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$

Factorizando ambos lados de la igualdad anterior,

$S_n (1 - r) = a_1 (1 - r^n)$

Despejando S_{n1}

$$S_n = \frac{a_1\,(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

Ejemplos:

1) Encuentre el término número 66 de la progresión geométrica 10,9, 8.1

Solución.

Utilizamos la siguiente fórmula:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Sustituimos los valores:

n= 66, $a_1 = 10$, $r = \frac{9}{10} = 0.9$

$$a_{66} = 10(0.9^{66-1})$$

$$a_{66} = 10(0.9^{65})$$

$$a_{66} = 0.010611166$$

El término 66 es igual a 0.010611166

2) ¿Cuántos términos hay en cada una de las siguientes sucesiones?

a) 2,3,4,5,…………,389.2390137

b) 1/3, 1,3,9…59049

Solución.

Es necesario despejar *n* de la siguiente fórmula.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$Log\ (x^b) = \mathrm{b} \log x$ $\qquad \log a_n = \log a_1 + (n-1)\log r$

$\log a_n - \log a_1 = (n-1)\log r$

$$\frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} = (n-1)$$

$$\frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1 = n$$

Sustituimos los datos:

$a_1 = 2,\ \ r = \frac{3}{2} = 1.5$, $\ a_n = 389.2390137$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log 389.2390137 - \log 2}{\log r 1.5} + 1$$

$$n = \frac{2.590216363 - 0.301029996}{0.176091259} + 1$$

$$n = \frac{2.289186367}{0.176091259} + 1$$

$$n \ = 13 + 1$$

$$n \ = 14$$

a) El número de términos de la sucesión 2,3,4,5,…………,389.2390137 son 14

b) Sustituimos los valores

$a_1 = \frac{1}{3} = 0.3333$, $r = 3.$, $a_n = 59049$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log 59049 - \log 0.3333}{\log 3} + 1$$

$$n = \frac{4.771212547 - (-0.477164686)}{0.477121255} + 1$$

$$n = \frac{5.248333802}{0.477121255} + 1$$

$$n = 11 + 1$$

$$n = 12$$

a) El número de términos de la sucesión 1/3, 1,3,9…59049 ,…………, 59049 es 12

BLOQUE V:
APLICAS EL INTERÉS SIMPLE

Competencias a desarrollar:

- Identifica y argumenta los elementos que intervienen en los rendimientos y cargos que se utilizan en el capital financiero.

- Analiza las relaciones entre dos o más variables de monto, valor actual, tasa de interés y tiempos en situaciones reales.

- Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando los enfoques de interés simple, valor actual y descuento simple.

- Aplica modelos matemáticos para la presentación y solución de problemas de interés simple, valor actual y descuento simple.

- Usa la tecnología de información y comunicación para localizar y ejemplificar diversas problemáticas de interés simple, valor actual y descuento simple.

Objetos de aprendizaje:

Interés simple.

Las empresas o personas físicas que solicitan préstamos de dinero usualmente pagan un interés al propietario o la entidad financiera como cuota por utilizar el dinero. La cantidad prestada se llama principal o capital, y a la suma del capital y del interés se le denomina el monto. Al periodo de tiempo acordado del préstamo se le llama plazo. El interés que se cobra es proporcional tanto al capital como al periodo del préstamo y se expresa por medio de una tasa de interés para cierto periodo de tiempo, que puede ser por un año.

De acuerdo con el banco, los intereses proporcionan una utilidad por la inversión de su dinero, y desde el punto de vista del cliente es el costo por haber utilizado el dinero en préstamo durante un determinado tiempo.

INTERÉS SIMPLE

El interés simple es cuando al término de cada periodo el interés obtenido no se agrega al capital inicial (no se capitaliza) para producir nuevos intereses, de esa manera, el capital permanece inamovible y consecuentemente el interés devengado también es constante, que se puede retirar al final de cada periodo o al final del horizonte temporal.

Es una operación financiera que se da cuando se invierte o se presta una cantidad de dinero, en la compra a crédito, o cuando hay una pérdida de valor de los bienes con relación al tiempo, en los que el capital se mantiene constante en todo el plazo de inversión y, como consecuencia, el pago de interés es también constante.

Para la descripción de las literales de la fórmula del interés simple, para este cuadernillo de trabajo las nombraremos de acuerdo a la palabra en español que le corresponda a la literal.

La fórmula del interés simple es:

$I = Ctn$

En donde:

$I =$ Interés

$C =$ Capital original, valor presente, valor actual.

$t =$ Tasa de interés que se paga por unidad de tiempo, expresada en forma decimal, en la misma unidad de tiempo que "n".

$n =$ Tiempo expresado en la misma unidad de tiempo que t.

Es importante comentar que en esta fórmula la tasa de interés debe expresarse en forma decimal y que el número de periodos corresponde a los señalados en la tasa de interés. Así, si la tasa de interés es anual, el número de periodos corresponde al número o fracción de años del préstamo. Una tasa de interés del 29.6% se expresa en forma decimal como 0.296% y una tasa de 8.7% anual se expresa como 0.087%.

Ejemplos:

¿Cuál es el interés simple de un préstamo a tres meses de $18,000.00 al 26.8%?

C= 18,000 $t = 26.8\ \%$ $\frac{26.8}{100}$ = 0.268 n = 3 meses = $\frac{3}{12}$ = 0.25

Utilizamos la fórmula y sustituimos los datos:

$$I = Ctn$$

$$I = 18{,}0000\ (0.268)(0.25) = \ 1{,}206$$

El interés simple del préstamo es de $1206.00

CÁLCULO DEL CAPITAL CONOCIDO DEL INTERÉS SIMPLE.

Para obtener el capital, y se tienen los otros tres elementos, se despeja el capital de la fórmula de interés simple.

$$I = Ctn$$

$$C = \frac{I}{tn}$$

Ejemplo.

¿Qué capital produce un interés simple de $12,340.14 a la tasa de 9% anual en cuatro cuatrimestres?

$I = 12{,}340$

$t = 9\%,\ anual = \frac{9}{100} = .09\%,\ cuatrimestral\ \frac{.09}{3} = 0.03\%$

$n = 4\ cuatrimestre\ = 16\ meses,\ \frac{16}{12}\ o\ \ 4\ cuatrimestre = \frac{4}{3}\ de\ año = 1.33$

C= ¿?

$C = \frac{I}{tn}$

$$C = \frac{12340.14}{(0.03)(1.33)}$$

$C = \frac{12340.14}{.0399}$

$C = 309{,}276.69$

CÁLCULO DE LA TASA

Para calcular la tasa de interés si se tienen los tres datos, se despeja la tasa de interés de la fórmula de interés simple.

$$I = Ctn$$

$t = \frac{I}{Cn}$

Es necesario comentar que la tasa que se obtiene como resultado, esta expresada en forma decimal y en la misma unidad de tiempo que contenga la "*n*".

Ejemplo.

¿Cuál es la tasa anual en la que estuvo invertido un capital de $56,500 para que produjera un monto simple de $61,020 en cuatro meses.

$C = 56{,}500 \quad I = 61{,}020 \qquad n = 4\ meses\ = 1\ cuatrimestre\ = \frac{1}{4}$ de año= 0.25

Sustituimos los valores en la fórmula:

$t = \frac{I}{Cn}$

$$t = \frac{61020}{(56500) \times (0.25)}$$

$$t = \frac{61020}{14125}$$

$$t = 4.32$$

Que equivale a un tipo de interés simple de 4.32% anual.

CÁLCULO DEL TIEMPO.

Para calcular el tiempo (*n*) conociendo los otros tres valores, lo obtenemos al despejar tiempo de la fórmula de interés simple.

$$I = Ctn$$

$$n = \frac{I}{Ct}$$

El tiempo "*n*" se obtiene en la misma unidad de periodo que contenga *"t"* tasa de interés.

Ejemplo.

¿En cuántos meses un capital de $15,000 producirá un monto simple de $22,000 a una tasa de 36% anual?

$C = 15{,}000$ $\quad I = 22{,}000$ $\quad t = 36\%, anual\ \frac{36}{100} = 0.36, mensual = \frac{0.36}{12} = 0.03$

Sustituimos los valores:

$$n = \frac{I}{Ct}$$

$$n = \frac{22{,}000}{(15{,}000) \times (0.03)}$$

$$n = \frac{22{,}000}{450}$$

$$n = 48.89$$

La cantidad de meses es 48.89 meses.

CÁLCULO DEL MONTO (M)

Por la necesidad y la frecuencia con la que se requiere calcular el monto de un préstamo o de una inversión es conveniente tener un fórmula directa. El monto es la suma del capital más el interés simple, esto es:

$$M = C + I$$

Por la fórmula de interés simple equivale a:

$$M = C + Ctn$$

Al factorizar el capital *C* en los dos términos del lado derecho, nos da:

$$M = C\,(1 + \ tn)$$

M= Monto simple, valor futuro , a interés simple.
C = Capital original, valor presente
t = Tasa de interés que se paga por unidad de tiempo, expresada en forma decimal, en la misma unidad de tiempo que "*n*"
n = Tiempo expresado en la misma unidad de tiempo que "*t*"

Ejemplos.

Para adquirir una cantidad de mercancía con valor de $8,500.00, un comerciante acuerda con el fabricante pagar de contado la mitad, $4,500.00 y el saldo a dos mese y medio. ¿Cuánto deberá pagar para liquidar el saldo si acepta pagar un interés del 15% anual sobre el saldo? Hay dos formas de obtener el resultado, una obteniendo el interés y sumarlo al capital, o aplicar directamente la fórmula de monto.

$C = 4{,}500 \quad t = 15\% = \frac{15}{100} = 0.15 \quad n = \frac{2.5}{12}$

$M = C\,(1 + tn)$

Sustituimos los datos:

$M = 4500\,(1 + 0.15 \times \frac{2.5}{12})$

$M = 4500\,(1.03125)$

$M = \$4640.62)$

Para liquidar el saldo deberá pagar el monto de $4640.62

En una operación comercial o financiera el plazo se determina por medio de fechas y no en términos de meses o años. Para determinar el interés en estos casos es necesario determinar el número de días que conforman el plazo de la operación. Una vez que se ha determinado el número de días "*n*" de la operación se usan dos maneras diferentes para expresar el plazo como fracción de un año

$$\frac{n}{360} \quad \text{y} \quad \frac{n}{365}$$

La primera se emplea para calcular el interés ordinario y la segunda para calcular el interés exacto. El interés ordinario es el más utilizado en la práctica comercial y bancaría, mientras que el interés exacto se utiliza principalmente para el comercio internacional así como para pagos de servicio de deuda entre gobiernos. Por su mayor uso, solo se presentaran ejemplos del interés ordinario al que nos referiremos simplemente como interés. Así las fórmulas antes utilizadas de interés simple y del monto se transforman entonces en:

Interés

$$I = \frac{Ctn}{360}$$

Monto

$$M = C\left(1 + \frac{tn}{360}\right)$$

Donde *n* denota el número de días de la operación en cuestión y la tasa de interés es *t* es anual.

Ejemplo.

Supongamos primero que una persona desea depositar en un pagaré bancario $350,000.00 pero no ha tomado la decisión si el plazo del pagaré deba ser a 14 o a 28 días. El banco le ofrece una tasa anual de 15.9 % anual en el caso del pagaré a 14 días y una tasa de 17.23% para el pagaré a 28 días, ¿Qué interés recibirá en cada caso? Para calcular estos intereses empleamos la primera fórmula, por lo que el pagaré a 14 días el interés sería:

Datos:

$C = 350{,}000$ $\quad t = 15.9, anual = \frac{15.9}{100} = 0.159$ $\quad n = 14\ días$

$$I = \frac{Ctn}{360}$$

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$I = \frac{350{,}000 \times 0.159 \times 14}{360}$$

$$I = \frac{779.100}{360}$$

$I = 2164.17$

Para el pagaré a 28 días el ahorrador recibirá:

Datos:

$C = 350{,}000 \quad t = 17.23, \ anual = \frac{17.23}{100} = 0.1723 \quad n = 14 \ días$

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$I = \frac{350{,}000 \times 0.1723 \times 28}{360}$$

$$I = \frac{1'688{,}540}{360}$$

$$I = 4690.38$$

Una empresa de reparto que compra una camioneta. El costo de la camioneta es de \$235,500.00 al contado. La empresa acuerda con la agencia de automóviles pagar \$195,000.00 el 15 de marzo al recibir la camioneta y liquidar el saldo mediante el pago único de \$48,786.00 el 21 de mayo siguiente. ¿Qué tasa de interés anual pagó? Es necesario primero determinar el número de días del crédito que le otorgó la agencia a la empresa. Una forma sencilla es contando mes con mes.

Mes	Número de días
Marzo	15
Abril	30
Mayo	10
Total de días	55

Observemos que el principal o capital del préstamo consiste del valor de la camioneta de contado menos el pago a la entrega del vehículo, esto es

$235{,}000 - 195{,}000 = 40{,}000$. El interés pagado por la empresa es entonces de $48{,}786 - 40{,}000 = 8{,}786.00$. Para calcular la tasa de interés despejamos *t* de la fórmula

$$I = \frac{Ctn}{360}$$

$$360\, I = Ctn$$

$$t = \frac{360\, I}{Cn}$$

Quedando, así:

$$t = \frac{360\, I}{Cn} = \frac{360 \times 8786}{195{,}000 \times 55} = \frac{3'162{,}960}{10725000} = 0.2949$$

Se obtuvo la tasa de interés anual que cargó la agencia fue del 29.49%

En este ejemplo se requiere determinar el plazo del préstamo.

Una persona solicita un préstamo de $25,000.00 el 17 de marzo y acepta pagar un interés simple anual del 24.7%. ¿Cuál es el plazo máximo del préstamo si no se desea pagar un monto mayor a $29,500.00. Es cierto que la persona solo pagaría un interés máximo de $4,500.00. De la fórmula del interés, despejamos el número de días *n*.

Datos:

$I = 4{,}5000 \quad C = 25{,}000 \quad t = 24.7\%\, ,\ \frac{24.7}{100} = 0.247$

$$I = \frac{Ctn}{360}$$

Despejamos el tiempo:

$$n = \frac{I\, 360}{Ct}$$

Sustituimos los valores:

$$n = \frac{4500 \times 360}{25{,}000 \times 0.247}$$

$$n = \frac{1'620{,}000}{6175}$$

$$n = 262.34$$

El plazo máximo del monto es de 262 días. Para determinar la fecha máxima del vencimiento del préstamo añadimos los días de cada mes a partir del 17 de marzo, sin pasarnos de los 262 días.

Mes	Número de días
Marzo	14
Abril	30
Mayo	31
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	30
Octubre	31
Noviembre	30
Total de días	259

Como sobran 3 días entonces la fecha de vencimiento del plazo máximo es el 3 de diciembre.

VALOR PRESENTE Y DESCUENTO SIMPLE.

Supongamos que una persona debe de pagar $38,600.00 para liquidar un préstamo tres meses antes de la fecha de vencimiento, esta persona gana un premio de la lotería, y, como considera que la tasa de interés del préstamo del 42% anual simple es muy alta, decide saldar el préstamo con estos cuatro meses de anticipación. ¿Cuánto debe de pagar?

Si la persona pagará $38,600.00 para saldar su deuda estaría pagando el interés correspondientes a los últimos cuatro meses del plazo original, siendo que ya no dispondrá del dinero en este periodo. Por otro lado, si solo pagará la cantidad que se le prestó, no estaría ni siquiera cubriendo el interés generado en el tiempo con que ha contado con el dinero. Lo justo entonces es que la persona no pagará el interés correspondiente a los cuatro meses. Esta cantidad puede pensarse como el capital o principal de un préstamo a una tasa de interés simple del 42% anual y que después de cuatro meses es liquidada mediante un pago de $38,600.00. Despejando *C* de la fórmula del monto se tiene:

Datos:

$M = 38{,}600 \quad t = 42\%, \frac{42}{100} = 0.42 \quad n = 4\ meses, \frac{4}{12}$

Fórmula

$M = C\ (1 + \ tn)$

Despejamos *C*:

$$C = \frac{M}{1 + \ tn}$$

Sustituimos los valores:

$$C = \frac{38{,}600}{1 + (0.42)\left(\frac{4}{12}\right)}$$

$$C = \frac{38{,}600}{1 + (0.42)\left(\frac{4}{12}\right)}$$

$$C = \frac{38{,}600}{1.14}$$

$$C = \frac{38{,}600}{1.14}$$

$$C = 33{,}859.64$$

A estos $33,859.64, que se requieren para saldar la deuda de $38,600.00 con una anticipación de cuatro meses se le llama valor presente o valor actual del préstamo, como en este caso calculamos el valor presente con base a un interés simple, a la diferencia entre el monto de la deuda al finalizar el plazo original y el valor presente se le llama descuento simple. En el ejemplo anterior, el descuento simple es de $38{,}600 - 33{,}859.54 = 4{,}740.36$. A la tasa de interés se le denomina también tasa de descuento. Así, el descuento simple en el monto, es lo mismo que el interés en el capital o principal, que ya hemos identificado con el valor presente. Esta identificación del valor presente de un documento a futuro como el principal o capital de un préstamo nos permite emplear las fórmulas del monto para calcular el valor presente. De las que despejamos *C.*

$M = C\,(1 + tn)$ $\qquad\qquad$ $M = C\left(1 + \frac{tn}{360}\right)$

Despejamos el C, y nos queda:

Valor presente

$C = \frac{M}{1+tn}$ $\qquad\qquad$ $C = \frac{M}{1+\frac{tn}{360}}$

Recordemos que en la segunda expresión *t* representa la tasa de interés anual y *n* representa el plazo en días. Hay muchas situaciones en los negocios en los que es necesario descontar una operación financiera con vencimiento en el futuro. Cuando esta operación es a corto plazo se emplea frecuentemente el descuento simple. Veamos ahora algunos ejemplos.

a) ¿Cuál es el valor presente de un pagaré por $6,590.00 que vence dentro de tres meses y medio, si la tasa de descuento es de 15%.

Datos:

$M = 6{,}590.00 \quad t = 15\% = \frac{15}{100} = 0.15 \quad n = 3.5\ meses, \frac{3.5}{12}$

Fórmula:

$$C = \frac{M}{1 + tn}$$

Sustituimos los datos:

$$C = \frac{6{,}590}{1 + (0.15)\left(\frac{3.5}{12}\right)} = \frac{6{,}590}{1.04375}$$

$$C = 6{,}313.77$$

b) Para saldar una deuda una persona debe pagar $7,850.00 el 30 de junio ¿Con qué cantidad liquidará la deuda el 25 de mayo anterior si la tasa de interés simple es del 16.5% anual? ¿Cuál es el descuento simple que se obtiene?

La idea es liquidar la deuda con una anticipación de 6 + 30 = 36 días, observamos que el valor presente de la deuda el 30 de junio es de:

Datos:

$M = 7{,}850 \quad t = 16.5\%, \frac{16.5}{100} = 0.165 \quad n = 36\ días$

Fórmula:

$$C = \frac{M}{1 + \frac{tn}{360}}$$

Sustituimos los datos:

$$C = \frac{7,850}{1 + \frac{(0.165)(36)}{360}}$$

$$C = \frac{7,850}{1.0165}$$

$$C = 7,722.57$$

Como el descuento es $M - C = 7,850 - 7,722 = 127.43$

BIBLIOGRAFÍA

Ayres Frank, Jr. Matemáticas financieras, 1era. Edición, Mc. Graw Hill, México, 1991.

Basurto Hidalgo, Eduardo; Castillo Peña, Gilberto; Matemáticas I, 1era. Edición, Pearson Educación, México 2010.

Demana D, Franklin; et al. Matemáticas universitarias introductorias, 1era. Edición, Pearson Educación, México 2009.

Goviden Portus, Lincoyán. Matemáticas financieras, 4ta. Edición, Mc. Graw Hill, Colombia, 1997.

Lezama Vázquez, Julio. Matemáticas financieras I, Universidad Católica Los Ángeles de Chimbote, Chimbote. Perú. 2010.

Pastor Jiménez, Guillermo. Matemáticas Financieras, 1era. Edición, Limusa, México 2004.

Vidaurri Aguirre, Héctor Manuel. Matemáticas Financieras, 3ra. Edición.

Villalobos, José Luis. Matemáticas Financieras, 3ra. Edición, Pearson Educación, México 2007.

Rubio Rosas, Luz María Paz. Matemáticas Financieras Manual, Universidad Autónoma de Baja California Sur.

DIRECTORIO

En la elaboración de este compendio de actividades participaron:

Coordinación:

Dirección Académica de Colegio de Bachilleres de Baja California Sur

Elaborador disciplinario:

M. en C. Edgar Francisco Cervantes Martínez

Jefatura de materia de capacitaciones de servicios turísticos y turismo alternativo

Autoridades del Colegio

Dr. Oscar Báez Sentíes

Director General

Ing. J. Arturo Hernández Hernández

Director Académico

Con agradecimiento a todas las fuentes de información que nos fueron proporcionadas.

Este material fue elaborado NO CON FINES DE LUCRO, sino solo con fines de apoyo educativo

Av. Antonio Navarro No.462 e/ A. Serdán y Guillermo Prieto, Colonia Centro.

C.P. 23000, La Paz, Baja California Sur